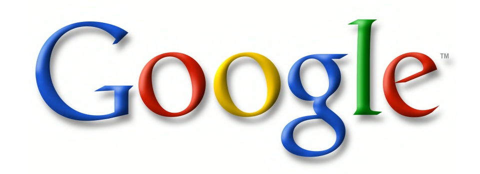
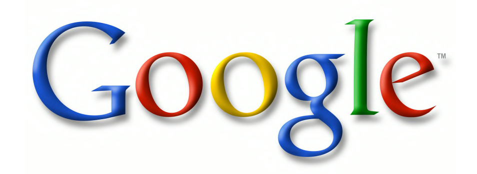




P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematik**, der **Technischen- und Natur-Wissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter dieser Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband Geschichte, Philosophie und Didaktik besprechen wird. Eine **französische Ausgabe**, von französischen Mathematikern besorgt, hat zu erscheinen begonnen.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica** (Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften), das **Archiv der Mathematik und Physik**, die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik** (Organ für angewandte Mathematik), die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, die **Mathematisch-naturwissenschaftlichen Blätter**, ferner **Natur und Schule** (Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen), die **Geographische Zeitschrift** u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“**. Diese jährlich zweimal erscheinenden „Mitteilungen“, die in 30000 Exemplaren im In- und Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags durch ausführliche Selbstanzeigen der Verfasser in Kenntnis setzen. **Die Mitteilungen werden jedem Interessenten auf Wunsch regelmäßig bei Erscheinen umsonst und postfrei von mir übersandt.** Das **ausführliche „Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen- und Natur-Wissenschaften nebst Grenzgebieten“** (100. Ausgabe. [XLVIII u. 272 S.] gr. 8. 1904. vergriffen) erscheint im Frühjahr 1908 in neuer Auflage mit eingehender alphabetischer und systematischer Bibliographie und einem Gedenktagebuch für Mathematiker. Wünsche um Zusendung, die kostenfrei erfolgt, nehme ich jederzeit gern entgegen.

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.

M V a 150:807



H. DURÈGE

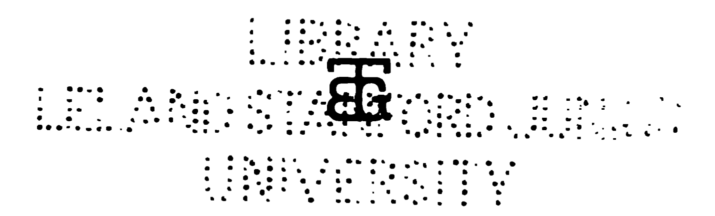
THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN

IN FÜNFTER AUFLAGE NEU BEARBEITET

VON

LUDWIG MAURER

MIT 36 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908

Vorrede.

Wie die Funktionentheorie habe ich auch die Theorie der elliptischen Funktionen von Durège vollständig neu bearbeitet. Es war dies schon aus dem Grunde nicht zu umgehen, weil in Durèges Werk die grundlegenden Arbeiten von Weierstraß keinerlei Berücksichtigung gefunden haben.

Bei der Darstellung der Theorie der elliptischen Funktionen kann man entweder von der Theorie der doppeltperiodischen Funktionen oder von der Theorie der elliptischen Integrale ausgehen. Der erstere Weg ist der kürzere; ich habe aber trotzdem den letzteren gewählt. Er empfiehlt sich dadurch, daß er dem Gang der historischen Entwicklung folgt, und er bietet außerdem den Vorteil, daß er dem Anfänger das Verständnis für Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen eröffnet. Überdies entspricht meiner Ansicht nach eine diesen Weg einschlagende Darstellung mehr einem praktischen Bedürfnis, denn an Darstellungen der Theorie der doppelt periodischen Funktionen herrscht kein Mangel.

Es erschien mir zweckmäßig, mit einer elementaren Darstellung der Theorie der elliptischen Integrale und Funktionen zu beginnen. Sie zeigt, wie die Integralrechnung mit Notwendigkeit zu denselben führt. Die Schwierigkeiten, auf die man stößt, sobald man komplexe Werte der Variabeln in Betracht zieht, führt dann naturgemäß dazu, von den Methoden der Funktionentheorie Gebrauch zu machen.

Die Theorie der Teilung und Transformation und die Theorie der Modulfunktionen sind so eng mit der ganzen Entwicklung der modernen Mathematik verknüpft, daß ich es für unumgänglich gehalten habe, wenigstens die Grundlagen derselben ausführlich zu behandeln.

Man kann diese Theorien nicht übersichtlich darstellen, ohne von den Grundbegriffen der Gruppentheorie Gebrauch zu machen, man reicht aber — wenigstens für die hier verfolgten Zwecke — mit wenigen Definitionen und Sätzen aus. Ich habe sie in einem kurzen Kapitel zusammengestellt.

Dem Zweck des Buches entsprechend habe ich das Maß der Vorkenntnisse, die ich voraussetze, möglichst beschränkt: außer den Elementen der Differential- und Integralrechnung werden in den ersten fünf Abschnitten nur die einfachsten Sätze der Funktionentheorie benutzt, in den letzten beiden Abschnitten werden außerdem die Elemente der Zahlentheorie und die einfachsten Sätze aus der Theorie der Differentialgleichungen zweiter Ordnung als bekannt vorausgesetzt.

Bezüglich der benutzten funktionentheoretischen Sätze habe ich überall auf die von mir herausgegebene Funktionentheorie Durèges verwiesen. Ich zitiere sie mit F. Th.

Um den Gebrauch des Buches zu erleichtern, habe ich die wichtigsten Formeln am Schluß zusammengestellt.

München, im Oktober 1907. **L. Maurer.**

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Elementare Theorie der elliptischen Integrale.

Zweiter Abschnitt.

Funktionentheoretische Untersuchung der rationalen Funktionen der Größen x und $\sqrt{f(x)}$.

Dritter Abschnitt.

Die Integrale der rationalen Funktionen der Fläche T.

Vierter Abschnitt.

Darstellung der rationalen Funktionen der Fläche T durch transzendente Funktionen.

Fünfter Abschnitt.

Darstellung der elliptischen Funktionen.

Sechster Abschnitt.

Anwendungen der elliptischen Funktionen.

Das sphärische Pendel.

Rotation eines Körpers um seinen Schwerpunkt.

Siebenter Abschnitt.

Sätze aus der Gruppentheorie.

Achter Abschnitt.

Teilung und Transformation.

Neunter Abschnitt.

Die Modulfunktionen.

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

Erster Abschnitt.

Elementare Theorie der elliptischen Integrale.

§ 1. Definition der elliptischen Integrale. Die einfachsten Integrale, mit denen man es in der Integralrechnung zu tun hat, sind die Integrale der rationalen Funktionen einer

Berichtigungen.

S. 19, Fußnote lies: Der numerische Faktor $\frac{1}{4 \cdot 36^3}$ bzw. $\frac{1}{4^4}$ ist hinzugesetzt, um die Übereinstimmung mit der in der Invariantentheorie üblichen Bezeichnungsweise herzustellen. Weierstraß schreibt 16 G statt G.

S. 105, Zeile 9 v. o. lies: Residuen.

S. 106, Zeile 7 v. o. lies: Funktion Φ statt Funktion F.

S. 118. Die letzte Gleichung des § 35 ist mit der Nummer (15) statt (14) zu versehen.

S. 131, Zeile 8 v. o. lies: der Wert statt den Wert.

S. 141, letzte Zeile lies: folglich verhält sich die Funktion . . .

S. 190, Zeile 10 v. o. lies: im letzten Faktor des Nenners $H(u - u_n)$ statt $H(u - u)$.

S. 211, Zeile 14 und 15 v. o. sind die Worte gerade und ungerade zu vertauschen.

S. 213, Zeile 6 v. o. lies: $q^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\pi \omega_3 i}{4 \omega_1}}$ statt $e^{\frac{\pi \omega_3 i}{\omega_1}}$.

S. 288, Zeile 16 v. u. lies: Die ausgeschlossenen Fälle statt Diese.

S. 312, vorletzte Zeile lies: $\sum\limits_{x_{m-1}=0}^{q_{m-1}-1}$ statt $\sum\limits_{x_{m-1}}^{q_{m-1}-1}$.

S. 347, Zeile 5 v. o. lies: vom Grade n^2 bzw. $n^2 - 1$ der Größe y statt vom Grade n^2.

S. 359, Zeile 12 und 16 v. u. lies: $R'_\alpha(x_{\lambda\mu})$ und $R'_\alpha(p(u))$ statt $R'(x_{\lambda\mu})$ und $R'(p(u))$.

S. 363, Zeile 3 v. u. lies: Gruppe Γ statt Gruppe G.

S. 413, Zeile 16 v. o. lies: § 115 Nr. 9 statt § 115 Nr. 7.

Neunter Abschnitt.

Die Modulfunktionen.

Erster Abschnitt.

Elementare Theorie der elliptischen Integrale.

§ 1. Definition der elliptischen Integrale. Die einfachsten Integrale, mit denen man es in der Integralrechnung zu tun hat, sind die Integrale der rationalen Funktionen einer Variabeln x. Sie lassen sich bekanntlich durch rationale Funktionen, Logarithmen und zyklometrische Funktionen ausdrücken. Wenn wir uns nicht auf reelle Werte der Variabeln beschränken, sondern auch komplexe Werte derselben in Betracht ziehen, so können wir die zyklometrischen Funktionen durch Logarithmen ausdrücken. Die Integration rationaler Funktionen führt somit nur zu einer Klasse transzendenter Funktionen, den Logarithmen. Wären diese nicht von früher her bekannt gewesen, so hätte die Integralrechnung mit Notwendigkeit zu ihnen geführt.

Die nächst einfachen Integrale sind die Integrale von rationalen Ausdrücken, die außer von der Variabeln x noch von einer Quadratwurzel aus einer ganzen Funktion ersten oder zweiten Grades von x

$$s = \sqrt{a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2}$$

abhängen. Da sich die Größen x und s als rationale Funktionen einer und derselben Hilfsvariabeln y darstellen lassen, so ist das Integral einer rationalen Funktion der Größen x und s gleich dem Integral einer rationalen Funktion von y, daher führen die in Rede stehenden Integrale zu keiner neuen Transzendenten.

Wesentlich anders verhält sich die Sache, wenn unter dem Integralzeichen die Wurzel aus einer ganzen Funktion von höherem als dem zweiten Grade auftritt. Mit dem ein-

fachsten von den sich darbietenden Fällen — dem Fall, daß die Funktion unter dem Wurzelzeichen vom dritten oder vierten Grade ist — werden wir uns im folgenden beschäftigen.

Es sei eine ganze Funktion vierten Grades

$$f(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$$
$$= a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$$

vorgelegt. Wir setzen zur Abkürzung

$$\sqrt{f(x)} = s$$

und bezeichnen mit $R(x, s)$ eine beliebige rationale Funktion der angezeigten Argumente. Das allgemeinste Integral, mit dem wir uns zu beschäftigen haben, hat die Form

$$\int R(x, s)\, dx\,.$$

Man nennt dieses Integral ein elliptisches Integral und dementsprechend das Differential

$$R(x, s)\, dx$$

ein elliptisches Differential. Der Name rührt daher, daß die Rektifikation der Ellipse zu einem Integral dieser Form führt.

Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ zwei gleiche Wurzeln besitzt, so läßt sich R als rationale Funktion der Variabeln x und einer Quadratwurzel aus einer ganzen Funktion zweiten Grades von x darstellen; dieser Fall bietet kein Interesse und wir schließen ihn deshalb ein für allemal aus. Im übrigen unterliegen die Koeffizienten der ganzen Funktion $f(x)$ keiner Beschränkung. Wir lassen insbesondere die Möglichkeit offen, daß der erste Koeffizient a_0 verschwindet, daß sich also $f(x)$ auf eine ganzen Funktion dritten Grades reduziert.

§ 2. Die drei Gattungen elliptischer Integrale.

Die erste Aufgabe, die wir zu erledigen haben, ist die das allgemeine elliptische Integral

$$\int R(x, s)\, dx$$

auf einfachere Integrale zurückzuführen

Weil die Größe s^2 rational durch x ausgedrückt werden kann, so läßt sich die Funktion R in der Form

$$R = \frac{A + Bs}{C + Ds}$$

darstellen, wo A, B, C, D ganze rationale Funktionen von x bedeuten. Wir multiplizieren im Zähler und Nenner mit

$$(C - Ds)s$$

und können nach einer leichten Reduktion R in die Form

$$R = \frac{L + Ms}{N} \cdot \frac{1}{s}$$

setzen, wo L, M, N ebenfalls ganze rationale Funktionen von x bedeuten. Das Integral

$$\int \frac{M}{N} dx$$

läßt sich auf Logarithmen und zyklometrische Funktionen zurückführen, wir haben es also nur noch mit dem Integral

$$I = \int \frac{L}{N} \frac{dx}{s}$$

zu tun. Die rationale Funktion

$$\frac{L}{N}$$

zerlegen wir in eine ganze und eine echt gebrochene Funktion und die letztere zerfällen wir in Partialbrüche. Wir gelangen dadurch zu einer Zerlegung des Integrals I in eine Summe von Integralen von folgenden Typen

$$U = \int \frac{dx}{s} \tag{1}$$

$$P_n = \int \frac{x^n dx}{s} \tag{2}$$

$$Q_n = \int \frac{dx}{(x - c)^n s}. \tag{3}$$

Hier bedeutet n eine positive ganze Zahl.

Die Integrale P_n, deren Index > 2 ist, lassen sich auf die Integrale U, P_1 und P_2 zurückführen.

Aus der Gleichung

$$\frac{ds^2}{dx} = 2ss' = f'(x)$$

folgt

$$s' = \frac{f'(x)}{2s}.$$

Folglich ist

$$\frac{d x^{n-3} s}{dx} = (n-3)\, x^{n-4} s + x^{n-3} s'$$

$$= \frac{2(n-3)\, x^{n-4} f(x) + x^{n-3} f'(x)}{2s}$$

$$= \frac{(2n-2)a_0 x^n + (8n-12)a_1 x^{n-1} + (12n-24)a_2 x^{n-2} + (8n-20)a_3 x^{n-3} + (2n-6)a_4 x^{n-4}}{2s}$$

Durch Integration ergibt sich hieraus die Gleichung

$$(n-1)a_0 P_n + (4n-6)a_1 P_{n-1} + (6n-12)a_2 P_{n-2} +$$
$$+ (4n-10)a_3 P_{n-3} + (n-3)a_4 P_{n-4}$$
$$= x^{n-3} s + \text{Konst.}$$
$$(n = 3, 4, 5 \ldots).$$

Unter Benützung dieser Rekursionsformel können wir das Integral P_n durch die Integrale

$$(4) \qquad P_0 = U \qquad P_1 = \int \frac{x\,dx}{s} \qquad P_2 = \int \frac{x^2 dx}{s}$$

und eine rationale Funktion der Größen x und s ausdrücken.

Für die Integrale Q_n können wir ebenfalls eine Rekursionsformel aufstellen. Wir gehen von der Gleichung aus

$$\frac{d \dfrac{s}{(x-c)^{n-1}}}{dx} = -(n-1)\frac{s}{(x-c)^n} + \frac{f'(x)}{2(x-c)^{n-1}s}$$
$$= \frac{-2(n-1)f(x) + (x-c)f'(x)}{2(x-c)^n s}$$

und entwickeln den Zähler auf der rechten Seite dieser Gleichung nach Potenzen von $x - c$. Wir erhalten

$$\frac{d \dfrac{s}{(x-c)^{n-1}}}{dx} = -\Big[2(n-1)f(c) + \frac{2n-3}{1} f'(c)(x-c) + \frac{2n-4}{2} f''(c)(x-c)^2$$
$$+ \frac{2n-5}{6} f'''(c)(x-c)^3 + \frac{2n-6}{24} f^{(IV)}(c)(x-c)^4\Big] \cdot \frac{1}{2(x-c)^n s}.$$

Durch Integration ergibt sich hieraus die Gleichung

$$(5)\quad \begin{cases} (n-1)f(c)Q_n + \frac{2n-3}{2}f'(c)Q_{n-1} + \frac{n-2}{2}f''(c)Q_{n-2} + \\ \qquad + \frac{2n-5}{12}f'''(c)Q_{n-3} + \frac{n-3}{24}f^{(IV)}(c)Q_{n-4} \\ = -\frac{s}{(x-c)^{n-1}} + \text{Konst.} \\ (n = 2, 3, 4 \ldots). \end{cases}$$

Beim Gebrauch dieser Formel müssen wir unterscheiden, ob die Konstante c eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist oder nicht. Wenn der letztere Fall eintritt, so können wir das Integral Q_n auf die Integrale

$$Q_1 = \int \frac{dx}{(x-c)s} \quad Q_0 = U \quad Q_{-1} = \int \frac{(x-c)\,dx}{s} \quad Q_{-2} = \int \frac{(x-c)^2\,dx}{s}$$

zurückführen; die Integrale Q_{-1} und Q_{-2} lassen sich durch die Integrale P_1, P_2 und U ausdrücken. Es tritt also zu den Integralen (4) nur noch das Integral

$$(6)\qquad Q_1 = \int \frac{dx}{(x-c)s}$$

hinzu.

Nehmen wir nun an, die Konstante c sei Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$; es sei etwa

$$c = \alpha_1 .$$

Unter dieser Voraussetzung fällt in der Gleichung (5) das erste Glied auf der rechten Seite weg; wir können daher nicht nur, wie in dem eben behandelten Fall das Integral Q_n auf die Integrale

$$Q_1 \quad P_1 \quad P_2 \quad U$$

zurückführen, sondern wir erhalten, wenn wir $n = 2$ setzen, auch noch die Relation zwischen diesen Integralen:

$$(7)\quad \frac{1}{2}f'(\alpha_1)\int \frac{dx}{(x-\alpha_1)s} = \frac{1}{12}f'''(\alpha_1)\int \frac{(x-\alpha_1)\,dx}{s} + \\ + \frac{1}{24}f^{(IV)}(\alpha_1)\int \frac{(x-\alpha_1)^2\,dx}{s} - \frac{s}{x-\alpha_1} + \text{Konst.}$$

Nun ist

$$\frac{1}{12}f'''(\alpha_1)(x-\alpha_1)+\frac{1}{24}f^{(IV)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^2$$
$$=2(a_0\alpha_1+a_1)(x-\alpha_1)+a_0(x-\alpha_1)^2$$
$$=(a_0x^2+2a_1x+a_2)-(a_0\alpha_1{}^2+2a_1\alpha_1+a_2)$$
$$=\frac{1}{12}f''(x)-\frac{1}{12}f''(\alpha_1).$$

Substituieren wir diesen Ausdruck in (7), so folgt

$$(8)\qquad \frac{1}{2}f'(\alpha_1)\int\frac{dx}{(x-\alpha_1)s}=\frac{1}{12}\int\frac{f''(x)\,dx}{s}-\frac{f''(\alpha_1)}{12}\int\frac{dx}{s}-$$
$$-\frac{s}{x-\alpha_1}+\text{Konst.}$$

Das Integral

$$(9)\qquad \frac{1}{12}\int\frac{f''(x)\,dx}{s}$$

läßt sich durch die Integrale (4) P_1, P_2 und U ausdrücken; es ist aber zweckmäßiger umgekehrt P_2 durch P_1, U und das Integral (9) auszudrücken.

Das Integral P_1 läßt sich mittels eines Grenzübergangs auf das Integral Q_1 (6) zurückführen, es repräsentiert also keinen selbständigen Typus. Es ist nämlich

$$c^2Q_1+cU=\int\left(\frac{c^2}{x-c}+c\right)\frac{dx}{s}=\int\frac{cx}{x-c}\cdot\frac{dx}{s},$$

folglich

$$\lim_{c=\infty}(c^2Q_1+cU)=-\int\frac{x\,dx}{s}=-P_1.$$

Das allgemeine elliptische Integral läßt sich somit — wenn wir von rationalen Funktionen und Logarithmen absehen — auf dreierlei Integrale zurückführen:

das Integral erster Gattung $U=\int\frac{dx}{s}$,

das Integral zweiter Gattung $\int\frac{\frac{1}{12}f''(x)\,dx}{s}$,

das Integral dritter Gattung $\int\frac{dx}{(x-c)s}$.

Die Integrale erster und zweiter Gattung hängen nur von den Koeffizienten der Funktion $f(x)$ ab, das Integral

dritter Gattung hängt außerdem noch von dem Parameter c ab.

Bei allen drei Integralen lassen wir vorerst die Integrationskonstante unbestimmt. Es ist ferner zu bemerken, daß ein jedes der drei Integrale, ohne daß sein Charakter im wesentlichen geändert wird, noch mit einer beliebigen Konstanten multipliziert werden kann. Zu den Integralen zweiter und dritter Gattung kann überdies noch das mit einer beliebigen Konstanten multiplizierte Integral erster Gattung addiert werden.

Um zu allgemein gültigen Resultaten zu gelangen, dürfen wir die Koeffizienten der Funktion $f(x)$ nicht als ein für allemal numerisch festgelegte Konstante betrachten, sondern wir müssen sie als verfügbare Parameter ansehen. Da ist es nun wichtig, durch geeignete Transformationen dafür zu sorgen, daß die Anzahl der in Betracht zu ziehenden Parameter möglichst klein wird. Diese Aufgabe werden wir zunächst erledigen. Wir können uns dabei offenbar auf die Transformation des Integrals erster Gattung beschränken.

§ 3. Einführung einer neuen Variabeln. An Stelle der Variabeln x führen wir mittels der Substitution

(1)
$$x = \frac{py + p'}{qy + q'}$$

eine neue Variable y ein. Die „Substitutionsdeterminante"

(2)
$$r = pq' - p'q$$

darf nicht verschwinden, im übrigen unterliegen die Substitutionskoeffizienten keiner Beschränkung.

Wenn die Gleichung (1) gegeben ist, so sind die Substitutionskoeffizienten nur bis auf einen gemeinsamen Proportionalitätsfaktor m bestimmt. Ist auch noch die Substitutionsdeterminante r gegeben, so ist der Faktor m bis aufs Vorzeichen bestimmt. Bei den folgenden Betrachtungen spielt dieses Vorzeichen keine Rolle, wir können daher zwei Systeme von Substitutionskoeffizienten, die sich nur dadurch unterscheiden, als nicht wesentlich verschieden ansehen.

Der Gleichung (1) können wir eine einfache geometrische

Bedeutung unterlegen: verstehen wir unter x und y Abszissen, die auf einer festen Geraden von einem festen Punkt aus gezählt werden, so stellt die Gleichung (1) eine projektive Beziehung zwischen den Punktreihen (x) und (y) her. Der Anschaulichkeit wegen machen wir im folgenden von der Bezeichnungsweise Gebrauch, die diese geometrische Interpretation an die Hand gibt.

Wir führen die Substitution (1) in $f(x)$ aus und setzen

$$f(x) = f\left(\frac{py+p'}{qy+q'}\right) = \frac{F(y)}{(qy+q')^4}. \tag{3}$$

$F(y)$ ist eine ganze Funktion vierten Grades von y; wir setzen

$$F(y) = b_0 y^4 + 4b_1 y^3 + 6b_2 y^2 + 4b_3 y + b_4. \tag{4}$$

Diese ganze Funktion $F(y)$ bezeichnet man als „Transformierte" der Funktion $f(x)$.

Lassen wir y unbegrenzt wachsen, so folgt aus (3) mit Rücksicht auf (4)

$$b_0 = q^4 f\left(\frac{p}{q}\right)$$

oder

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 p^4 + 4a_1 p^3 q + 6a_2 p^2 q^2 + 4a_3 p q^3 + a_4 q^4 \\ &= a_0 (p - \alpha_1 q)(p - \alpha_2 q)(p - \alpha_3 q)(p - \alpha_4 q). \end{aligned} \tag{5}$$

Den Nullpunkten α_ν der Gleichung $f(x) = 0$ entsprechen die Nullpunkte β_ν der Gleichung $F(y) = 0$. Es ist daher wegen (1)

$$\alpha_\nu = \frac{p\beta_\nu + p'}{q\beta_\nu + q'} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4), \tag{6}$$

woraus

$$\beta_\nu = \frac{q'\alpha_\nu - p'}{-q\alpha_\nu + p} \tag{7}$$

folgt.

Wegen (1) ist

$$x - \alpha_\nu = \frac{(p - q\alpha_\nu)y + (p' - q'\alpha_\nu)}{qy + q'}.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (7)

$$x - \alpha_\nu = \frac{p - q\alpha_\nu}{qy + q'}(y - \beta_\nu).$$

Demnach ist

$$f(x) = a_0 \prod_{\nu=1}^{4} (x - \alpha_\nu) = \frac{a_0 \prod\limits_{\nu=1}^{4} (p - q\alpha_\nu) \prod\limits_{\nu=1}^{4} (y - \beta_\nu)}{(qy + q')^4}.$$

Mit Rücksicht auf (3) und (5) folgt

$$F(y) = b_0\,(y - \beta_1)(y - \beta_2)(y - \beta_3)(y - \beta_4). \tag{8}$$

Wenn der Quotient $\frac{p}{q}$ gleich der Wurzel α_1 ist, so wird die Wurzel β_1 unendlich (7) und der leitende Koeffizient b_0 der Funktion $F(y)$ verschwindet (5).

Aus der Identität (s. (5) und (8))

$$b_0 y^4 + 4b_1 y^3 + 6b_2 y^2 + 4b_3 y + b_4$$
$$= b_0\beta_1\left(\frac{y}{\beta_1} - 1\right)(y - \beta_2)(y - \beta_3)(y - \beta_4)$$

folgt

$$\lim_{\beta_1 = \infty} b_0\beta_1 = -4b_1. \tag{9}$$

Umgekehrt folgt aus (5), daß der leitende Koeffizient b_0 nur verschwinden kann, wenn eine der Wurzeln β_ν unendlich wird.

Wir legen uns nun die Frage vor: welche Bedingungen müssen zwischen den Wurzeln α_ν und β_ν bestehen, damit bei geeigneter Wahl der Substitutionskoeffizienten die Gleichungen (6) und (7) bestehen können.

Aus (7) folgt mit Rücksicht auf (2)

$$\beta_1 - \beta_2 = \frac{r(\alpha_1 - \alpha_2)}{(p - q\alpha_1)(p - q\alpha_2)}, \quad \beta_3 - \beta_4 = \frac{r(\alpha_3 - \alpha_4)}{(p - q\alpha_3)(p - q\alpha_4)}.$$

Folglich ist mit Rücksicht auf (5)

$$b_0(\beta_1 - \beta_2)(\beta_3 - \beta_4) = r^2 a_0(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4). \tag{10}$$

Für die rechts auftretende Wurzelfunktion und die beiden analogen Funktionen, die sich durch Permutation der Wurzeln ergeben, führen wir eigene Bezeichnungen ein. Wir setzen

$$\begin{aligned} A &= a_0(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4) \\ B &= a_0(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2) \\ C &= a_0(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_3). \end{aligned} \tag{11}$$

Die Bezeichnung ist so gewählt, daß bei zyklischer Vertauschung der Indizes 2, 3, 4 auch die Größen A, B, C zyklisch vertauscht werden.

Die Größen A, B, C genügen, wie man sich leicht überzeugt, der Gleichung

$$A + B + C = 0. \tag{12}$$

Die Größen, in die A, B, C übergehen, wenn man a_0 durch b_0 und eine jede der Größen α_ν durch die entsprechende Größe β_ν ersetzt, bezeichnen wir mit A', B', C'.

Bei Benützung dieser Bezeichnung können wir die Gleichung (10) und die beiden Gleichungen, die durch zyklische Vertauschung der Indizes 2, 3, 4 aus derselben hervorgehen in der Form

$$A' = r^2 A\,, \quad B' = r^2 B\,, \quad C' = r^2 C \tag{13}$$

schreiben.

Man bezeichnet die Größen A, B, C, weil sie sich bei der Transformation (1) nur um einen Faktor ändern, der von den Koeffizienten der ganzen Funktion $f(x)$ unabhängig ist, als „Invarianten".

Die Gleichungen (13) sind wegen (12) nur zwei unabhängigen Gleichungen äquivalent. Daher sind die Gleichungen, die man durch Elimination von r^2 erhält, alle mit der Gleichung

$$\frac{A'}{B'} = \frac{A}{B} \tag{14}$$

gleichbedeutend.

Der Quotient

$$\lambda = -\frac{A}{B} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_3} : \frac{\alpha_2 - \alpha_4}{\alpha_3 - \alpha_4} \tag{15}$$

stellt bekanntlich das Doppelverhältnis der vier Punkte $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ dar. Die Gleichung (14) ist daher der Ausdruck des bekannten geometrischen Satzes, daß das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Punktreihe gleich dem Doppelverhältnis der entsprechenden Punkte in einer projektiven Punktreihe ist.

Bei unseren Betrachtungen über Transformation haben wir es fortwährend mit Doppelverhältnissen zu tun. Wir wollen deshalb dafür eine abkürzende Bezeichnung einführen. Wir setzen

$$\lambda = -\frac{A}{B} = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4). \tag{16}$$

Die Gleichung (14) drückt die notwendige und ausreichende Bedingung dafür aus, daß die vier Gleichungen (6) miteinander verträglich sind. Zum Beweis setzen wir die Gleichung

$$\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - x)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(x - \alpha_2)} = \frac{(\beta_1 - \beta_2)(\beta_3 - y)}{(\beta_1 - \beta_3)(y - \beta_2)}$$

an, durch deren Auflösung sich eine Gleichung der Form (1) ergibt. Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß auf Grund dieser Gleichung den Punkten $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ beziehungsweise die Punkte $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ entsprechen. Daß auch dem Punkte α_4 der Punkt β_4 entspricht, folgt aus (14).

§ 4. Das Doppelverhältnis. Das Doppelverhältnis (Gl. (16) des vorigen Paragraphen)

$$\lambda = -\frac{A}{B} = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$$

hängt von der Anordnung der vier Punkte α_ν ab. Um den Zusammenhang zwischen den Werten, die es annehmen kann, zu übersehen, müssen wir die Änderungen untersuchen, die die Größen A, B, C erfahren, wenn die Größen α_ν permutiert werden.

Den folgenden vier Permutationen entsprechen dieselben Werte der drei Größen A, B, C (s. Gl. (11) des vorigen Paragraphen)

$$(1) \qquad \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{matrix}$$

Wenn eine beliebige Permutation der vier Punkte α_ν vorgelegt ist, so können wir mittelst einer der Vertauschungen, die sich aus der vorstehenden Tabelle ergeben, den Punkt α_1 an die erste Stelle bringen. Da bei dieser Vertauschung keine der Größen A, B, C ihren Wert ändert, brauchen wir nur die Permutationen der drei Punkte $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ in Betracht zu ziehen.

Wie schon im vorigen Paragraphen (unter (11)) bemerkt worden ist, erfahren bei zyklischer Vertauschung der Punkte $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ auch die Größen A, B, C eine zyklische Vertauschung. Vertauschen wir die Punkte α_2 und α_3, so treten an Stelle der Größen A, B, C beziehungsweise die Größen $-B$, $-A$, $-C$.

Aus diesen beiden Vertauschungen lassen sich alle übrigen zusammensetzen. Der Sachverhalt läßt sich noch einfacher darstellen, wenn wir an Stelle der Größen A, B, C die Differenzen

(2) $\mathsf{A} = B - C, \quad \mathsf{B} = C - A, \quad \Gamma = A - B$

einführen. Mit Rücksicht auf die Gleichung (12) des vorigen Paragraphen folgt aus diesen Gleichungen

(3) $3A = \Gamma - \mathsf{B}, \quad 3B = \mathsf{A} - \Gamma, \quad 3C = \mathsf{B} - \mathsf{A}.$

Einer zyklischen Vertauschung der Punkte $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ entspricht eine zyklischen Vertauschung der Größen $\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma$. Vertauschen wir die Punkte α_2 und α_3, während α_4 an seinem Platz bleibt, so werden die Größen A und B vertauscht, Γ bleibt ungeändert.

Daraus folgt:

die Größen $\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma$ werden in derselben Weise permutiert wie die Punkte $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$.

Wenn wir die Punkte $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ zyklisch vertauschen, so tritt an Stelle des Doppelverhältnisses

$$\lambda = -\frac{A}{B}$$

das Doppelverhältnis

$$\lambda_1 = -\frac{B}{C} = \frac{B}{A+B} = \frac{1}{1-\lambda}$$

und bei abermaliger zyklischer Vertauschung

$$\lambda_2 = -\frac{C}{A} = \frac{A+B}{A} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Vertauschen wir die Punkte α_2 und α_3, so tritt an Stelle von

$$\lambda = -\frac{A}{B}, \quad \lambda_3 = -\frac{B}{A} = \frac{1}{\lambda}$$

und bei zyklischer Vertauschung der Punkte $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ ergeben sich hieraus die Werte

$$\lambda_4 = -\frac{C}{B} = \frac{1}{\lambda_1} = 1 - \lambda$$

$$\lambda_5 = -\frac{A}{C} = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Wir stellen die Werte der Doppelverhältnisse, die den sechs Permutationen der Größen $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ entsprechen, übersichtlich zusammen.

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) &= \lambda \;= -\frac{A}{B}\\
(\alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_2) &= \lambda_1 = -\frac{B}{C} = \frac{1}{1-\lambda}\\
(\alpha_1\alpha_4\alpha_2\alpha_3) &= \lambda_2 = -\frac{C}{A} = \frac{\lambda-1}{\lambda}\\
(\alpha_1\alpha_3\alpha_2\alpha_4) &= \lambda_3 = -\frac{B}{A} = \frac{1}{\lambda}\\
(\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_3) &= \lambda_4 = -\frac{C}{B} = 1-\lambda\\
(\alpha_1\alpha_4\alpha_3\alpha_2) &= \lambda_5 = -\frac{A}{C} = \frac{\lambda}{\lambda-1}\,.
\end{aligned}\right.$$

Die sechs Werte des Doppelverhältnisses sind im allgemeinen untereinander verschieden, eine Ausnahme tritt nur in den folgenden drei Fällen ein.

Wenn eine der drei Größen A, B, C verschwindet, so haben zwei der Doppelverhältnisse den Wert 0, zwei den Wert 1, zwei werden unendlich groß. In diesem Falle müssen zwei von den vier Punkten α_ν zusammenfallen.

Wenn eine der Differenzen

$$\mathsf{A} = B - C, \quad \mathsf{B} = C - A, \quad \Gamma = A - B$$

verschwindet, so haben je zwei der Doppelverhältnisse einen der Werte -1, $\frac{1}{2}$, 2. Dieser Fall hat eine einfache geometrische Bedeutung: ist etwa $\lambda_2 = -1$, so sind die Punkte α_1, α_3 durch die Punkte α_2, α_4 harmonisch getrennt.

Wenn die Größen A, B, C der Gleichung

$$BC - A^2 = BC + CA + AB = \frac{1}{3}(\mathsf{B}\Gamma + \Gamma\mathsf{A} + \mathsf{A}\mathsf{B}) = 0$$

genügen (s. Gl. (3) und Gl. (12) des vorigen Paragraphen), so haben je drei der sechs Doppelverhältnisse denselben Wert. Die beiden Werte sind die Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Man bezeichnet in diesem Falle das Doppelverhältnis als äquianharmonisch.

Unsere bisherigen Betrachtungen gelten, gleichviel ob die Koeffizienten der ganzen Funktion $f(x)$ reell sind oder nicht. Wir wollen nun annehmen, sie seien reell, und sehen zu, welche Folgerungen sich aus dieser Annahme für die Größen A, B, C und die Werte des Doppelverhältnisses ergeben. Da-

bei müssen wir drei verschiedene Fälle unterscheiden, je nachdem die Wurzeln α_ν sämtlich reell sind, oder ein Paar oder zwei Paar konjugiert imaginäre Wurzeln auftreten.

Nehmen wir zunächst an, die Wurzeln seien alle reell und zwar sei

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4.$$

Unter dieser Voraussetzung sind die Invarianten A, B, C ebenfalls reell.

Die Quotienten

$$\frac{A}{a_0} \quad \text{und} \quad \frac{C}{a_0}$$

sind positiv,

$$\frac{B}{a_0}$$

ist negativ (s. § 3, Nr. 11).

Wegen

$$A + B + C = 0 \quad (\S\ 3,\ \text{Nr. } 12) \tag{5}$$

sind die Größen A und C dem absoluten Betrag nach kleiner als B. Von den sechs Werten des Doppelverhältnisses sind zwei positiv und < 1, nämlich

$$\lambda = -\frac{A}{B} \quad \text{und} \quad \lambda_4 = 1 - \lambda = -\frac{C}{B} \cdot (4)$$

Die reziproken Werte sind positiv und > 1. Die beiden übrigen Werte

$$\lambda_2 = -\frac{1-\lambda}{\lambda} \quad \text{und} \quad \lambda_5 = \frac{1}{\lambda_2}$$

sind negativ.

Aus den Gleichungen (3) folgt, daß

$$\frac{\Gamma}{a_0} > \frac{\mathsf{B}}{a_0} > \frac{\mathsf{A}}{a_0} \tag{6}$$

ist.

Nehmen wir zweitens an, die Wurzeln α_1 und α_4 und die Wurzeln α_2 und α_3 seien konjugiert imaginär und zwar seien die imaginären Bestandteile von α_1 und α_2 positiv imaginär. Welches der beiden Wurzelpaare mit α_1, α_4 bezeichnet wird, bleibt dahingestellt.

In diesem Fall entspricht allen reellen Werten der Variabeln x dasselbe Vorzeichen der Funktion $f(x)$; wir nehmen an, es sei das positive, es sei also a_0 positiv. Die Größe

$$C = a_0(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_3)$$

ist als Produkt einer reellen positiven und zweier positiv imaginären Größen reell und negativ; die Größen

$$-A = a_0(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3) \quad \text{und} \quad B = a_0(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)$$

sind als Produkte einer reellen positiven und zweier konjugiert imaginären Größen reell und positiv. Wegen (5) ist

$$B > -A \quad \text{und} \quad B > -C.$$

Folglich sind die beiden Doppelverhältnisse

$$\lambda = -\frac{A}{B} \quad \text{und} \quad \lambda_4 = -\frac{C}{B}$$

auch in diesem Fall reell, positiv und < 1.

Die drei Größen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ genügen zufolge (3) der Ungleichung

$$\mathsf{A} > \mathsf{B} > \Gamma. \tag{7}$$

Nehmen wir nunmehr an, die Gleichung $f(x) = 0$ besitze zwei reelle Wurzeln α_1 und α_4 und ein Paar imaginäre α_2, α_3. Die Bezeichnung wählen wir so, daß

$$a_0(\alpha_1 - \alpha_4)$$

positiv und der imaginäre Bestandteil von α_2 positiv imaginär ist.

Die Größe

$$C = a_0(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_3)$$

ist rein imaginär und zwar positiv imaginär.

Die Größen

$$A = a_0(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4) \quad \text{und} \quad -B = a_0(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)$$

sind konjugiert imaginär. Wegen (5) sind die imaginären Bestandteile von $-A$ und $-B$ ebenso wie C positiv imaginär. In diesem Falle sind die sechs Werte des Doppelverhältnisses komplexe Größen. Der Wert

$$\lambda = -\frac{A}{B}$$

besitzt den absoluten Betrag 1.

§ 5. Die rationalen Invarianten. Eine rationale symmetrische Funktion der Größen ABC oder — was dasselbe sagen will — die Größen $\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma$ ist auch rationale symmetrische

Funktion der Wurzeln α_ν der Gleichung $f(x) = 0$ und läßt sich daher als rationale Funktion der Koeffizienten dieser Gleichung darstellen. Wir wollen die elementaren symmetrischen Funktionen der Größen $\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma$, aus denen sich alle anderen zusammensetzen lassen, berechnen. Es ist zweckmäßig, anstatt diese Berechnung direkt in Angriff zu nehmen, zunächst die elementaren symmetrischen Funktionen der drei Größen

(1) $L = a_0(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4),\ M = a_0(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_4\alpha_2),\ N = a_0(\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3)$

durch die Koeffizienten der Grundgleichung

$$f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$$

auszudrücken.

Wir gehen von den bekannten Gleichungen aus:*)

(2) $$\sum\alpha_1 = -\frac{4a_1}{a_0}\ \sum\alpha_1\alpha_2 = \frac{6a_2}{a_0}\ \sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{4a_3}{a_0}\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \frac{a_4}{a_0}$$

Für die elementaren symmetrischen Funktionen der Größen L, M, N ergeben sich die Ausdrücke

(3) $$H_1 = L + M + N = a_0\sum\alpha_1\alpha_2 = 6a_2,$$

(4) $$H_2 = LM + MN + NL = a_0^2\sum\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3$$

(5) $$H_3 = LMN = a_0^3\sum\alpha_1^3\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + a_0^3\sum\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2.$$

Nun ist

$$\sum\alpha_1\cdot\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \sum\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3 + 4\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

also wegen (2) und (4)

(6) $$H_2 = 16a_1a_3 - 4a_0a_4.$$

Es ist ferner

$$a_0^3\sum\alpha_1^3\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = a_0^2a_4\sum\alpha_1^2 = a_0^2a_4[(\sum\alpha_1)^2 - 2\sum\alpha_1\alpha_2]$$

also

(7) $$a_0^3\sum\alpha_1^3\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 16a_1^2a_4 - 12a_0a_2a_4.$$

Aus der Gleichung

$$4\frac{a_3}{a_0} = -\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

---

*) Wir machen von der üblichen Darstellungsweise der symmetrischen Funktionen Gebrauch: wir setzen ein Glied der Funktion, aus dem alle übrigen durch Vertauschung der Indizes hervorgehen, hinter das Summenzeichen Σ.

ergibt sich

$$16\frac{a_3^2}{a_0^2} = \sum\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 + 2\sum\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4$$
$$= \sum\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 + 2\frac{a_4}{a_0}\cdot\frac{6a_2}{a_0}.$$

Folglich ist

$$a_0^3\sum\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 = 16a_0a_3^2 - 12a_0a_2a_4. \tag{8}$$

Setzen wir die Werte (7) und (8) in (5) ein, so folgt

$$H_3 = 16a_1^2a_4 + 16a_0a_3^2 - 24a_0a_2a_4. \tag{9}$$

Die Größen $\mathsf{AB\Gamma}$ lassen sich nun leicht durch die Größen LMN ausdrücken. Aus der Gleichung (§ 3, Nr. 11)

$$\mathsf{A} = B - C = a_0[\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4)]$$

folgt mit Rücksicht auf (1) und (2)

$$\mathsf{A} = 6a_2 - 3L$$

und hieraus durch zyklische Vertauschung der Indizes 2, 3, 4

$$\mathsf{B} = 6a_2 - 3M$$
$$\Gamma = 6a_2 - 3N.$$

Es ist daher — wie sich auch unmittelbar aus der Definition der Größen $\mathsf{AB\Gamma}$ ergibt —

$$\mathsf{A} + \mathsf{B} + \Gamma = 0 \tag{10}$$

und mit Rücksicht auf (3), (4) und (6)

$$\frac{1}{9}(\mathsf{AB} + \mathsf{B}\Gamma + \Gamma\mathsf{A}) = 12a_2^2 - 4a_2H_1 + H_2$$
$$= -12a_2^2 + 16a_1a_3 - 4a_0a_4.$$

Wir setzen, einen gemeinschaftlichen numerischen Faktor ausscheidend

$$g_2 = -\frac{1}{36}(\mathsf{AB} + \mathsf{B}\Gamma + \Gamma\mathsf{A}) = -\frac{1}{12}(AB + BC + CA) \tag{11}$$
$$= a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2.$$

Es ist ferner mit Rücksicht auf (3), (6) und (9)

$$\frac{1}{27}\mathsf{AB}\Gamma = 8a_2^3 - 4a_2^2H_1 + 2a_2H_2 - H_3$$
$$= -16a_2^3 + 32a_1a_2a_3 - 8a_0a_2a_4 - 16a_1^2a_4 - 16a_0a_3^2$$
$$+ 24a_0a_2a_4.$$

Wir scheiden auch hier einen gemeinschaftlichen numerischen Faktor aus und setzen

$$(12)\qquad g_3 = \frac{1}{432}\,\mathsf{AB\Gamma} = \frac{1}{432}(B - C)(C - A)(A - B)$$

$$= a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3.$$

Wir können g_3 auch in Determinantenform schreiben:

$$g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnen wir im Anschluß an die S. 10 eingeführte Bezeichnungsweise die Werte, die die Größen $g_2 g_3$ annehmen, wenn man die Koeffizienten $a_0 a_1 \cdots$ der ganzen Funktion $f(x)$ durch die entsprechenden Koeffizienten $b_0 b_1 \cdots$ der transformierten Funktion $F(y)$ ersetzt, mit $g'_2 g'_3$. Aus den Gleichungen (§ 3, Nr. 12)

$$A' = r^2 A, \quad B' = r^2 B, \quad C' = r^2 C$$

folgt

$$g'_2 = r^4 g_2, \quad g'_3 = r^6 g_3.$$

Auch die Größen $g_2 g_3$ haben somit die Eigenschaft, daß sie sich nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante ändern, wenn man die Funktion $f(x)$ durch eine Substitution ersten Grades transformiert. Man bezeichnet daher auch diese Größen als Invarianten und zwar als rationale Invarianten im Gegensatz zu den irrationalen Invarianten ABC und $\mathsf{AB\Gamma}$.

Der Quotient $\frac{g_2^3}{g_3^2}$ bleibt bei der Transformation der Funktion $f(x)$ vollständig ungeändert, er ist eine „absolute Invariante“ und dasselbe gilt für jede rationale Funktion dieses Quotienten. Im folgenden bezeichnen wir insbesondere den Quotienten

$$(13)\qquad I = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}$$

als absolute Invariante.

Wenn die Invariante g_3 verschwindet, so liegen die vier Punkte α_ν harmonisch, wenn g_2 verschwindet, so liegen sie äquianharmonisch (S. 13).

Wenn zwei der Punkte α_ν zusammenfallen, so muß eine der drei Größen

$$A = \frac{1}{3}(\Gamma - \mathrm{B}), \quad B = \frac{1}{3}(\mathrm{A} - \Gamma), \quad C = \frac{1}{3}(\mathrm{B} - \mathrm{A})$$

verschwinden. Das Quadrat des Produktes dieser drei Größen ist eine symmetrische Funktion der Größen $\mathrm{A}\mathrm{B}\Gamma$ und muß sich daher rational durch die Invarianten g_2 und g_3 ausdrücken lassen. Wir setzen

$$(14) \qquad G = \frac{1}{4 \cdot 36^3}(\mathrm{B} - \Gamma)^2(\Gamma - \mathrm{A})^2(\mathrm{A} - \mathrm{B})^2 = \frac{1}{4^4} A^2 B^2 C^2.$$

Die Größe G bezeichnet man als Diskriminante der Gleichung $f(x) = 0$.*) Bei der Berechnung von G gehen wir von der Bemerkung aus, daß die Größen $\mathrm{A}\mathrm{B}\Gamma$ Wurzeln der Gleichung

$$(15) \quad \varphi(x) = (x - \mathrm{A})(x - \mathrm{B})(x - \Gamma) = x^3 - 36 g_2 x - 432 g_3 = 0$$

sind (vgl. (10), (11) und (12)). Durch Differentiation ergibt sich

$$\varphi'(x) = (x - \mathrm{B})(x - \Gamma) + (x - \Gamma)(x - \mathrm{A}) + (x - \mathrm{A})(x - \mathrm{B})$$
$$= 3(x^2 - 12 g_2).$$

Wir setzen der Reihe nach $x = \mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ und erhalten mit Rücksicht auf (15)

$$\varphi'(\mathrm{A}) = (\mathrm{A} - \mathrm{B})(\mathrm{A} - \Gamma) = 3(\mathrm{A}^2 - 12 g_2) = \frac{3}{\mathrm{A}}(24 g_2 \mathrm{A} + 432 g_3)$$
$$= \frac{72 g_2}{\mathrm{A}}\left(\frac{18 g_3}{g_2} + \mathrm{A}\right)$$

$$\varphi'(\mathrm{B}) = \frac{72 g_2}{\mathrm{B}}\left(\frac{18 g_3}{g_2} + \mathrm{B}\right) = (\mathrm{B} - \mathrm{A})(\mathrm{B} - \Gamma)$$

$$\varphi'(\Gamma) = \frac{72 g_2}{\Gamma}\left(\frac{18 g_3}{g_2} + \Gamma\right) = (\Gamma - \mathrm{A})(\Gamma - \mathrm{B}).$$

Wir multiplizieren die letzten drei Gleichungen miteinander und substituieren in (14); mit Rücksicht auf (15) und (12) ergibt sich

$$\varphi'(\mathrm{A})\varphi'(\mathrm{B})\varphi'(\Gamma) = -4 \cdot 36^3 G = -\frac{72^3 g_2^3}{432 g_3} \varphi\left(-\frac{18 g_3}{g_2}\right).$$

Hieraus folgt

$$(16) \qquad G = g_2^3 - 27 g_3^2.$$

---

*) Der numerische Faktor $\frac{1}{4 \cdot 36^3}$ bzw. $\frac{1}{4^4}$ ist hinzugesetzt, um mit Weierstraß' Bezeichnungsweise in Übereinstimmung zu kommen.

Wenn die Koeffizienten der ganzen Funktion $f(x)$ reell sind, so ist auch G reell. Sind die vier Wurzeln α_ν reell oder zerfallen sie in zwei Paare konjugiert imaginärer Größen, so sind die drei Größen A, B, C reell, folglich ist G positiv (14). Sind die beiden Wurzeln $\alpha_1 \alpha_4$ reell, die Wurzeln $\alpha_2 \alpha_3$ konjugiert imaginär, so ist die Invariante C rein imaginär, und die Invarianten A und B sind konjugiert imaginär (s. den Schluß des vorigen Paragraphen), folglich ist C^2 reell und negativ, $A^2 B^2$ reell und positiv, also ist G negativ.

Bei reellen Werten der Koeffizienten $a_0 a_1 \cdots$ ist also die Diskriminante G positiv, wenn alle Wurzeln reell oder alle Wurzeln komplex sind; sie ist negativ, wenn zwei Wurzeln reell und zwei komplex sind.

Wir können die absolute Invariante I (13) leicht als Funktion des Doppelverhältnisses

$$\lambda = -\frac{A}{B}$$

darstellen. Zufolge (11) ist

$$g_2 = -\frac{A^2}{12}\left(\frac{B+C}{A} + \frac{BC}{A^2}\right) = -\frac{A^2}{12}\left(\frac{BC}{A^2} - 1\right)$$

und hieraus folgt

$$g_2 = \frac{A^2}{12\lambda^2}(\lambda^2 - \lambda + 1).$$

Aus (12) folgt

$$g_3 = \frac{A^3}{432}\left(\frac{2B}{A} + 1\right)\left(-2 - \frac{B}{A}\right)\left(1 - \frac{B}{A}\right)$$

$$= -\frac{A^3}{432\lambda^3}(\lambda - 2)(2\lambda - 1)(\lambda + 1) = -\frac{A^3}{432\lambda^3}(2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2).$$

Es ist ferner (14)

$$G = \frac{1}{4^4} A^6 \frac{B^2}{A^2}\frac{C^2}{A^2} = \frac{A^6}{4^4}\frac{1}{\lambda^2}\cdot\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right)^2.$$

Wir erhalten daher die Proportion

$$(17) \qquad I : I - 1 : 1 = g_2^3 : 27 g_3^2 : G$$
$$= 4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 : (2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2)^2 : 27\lambda^2(\lambda - 1)^2.$$

§ 6. Transformation der Funktion $f(x)$ und des Differentials erster Gattung. Im § 3 ist nachgewiesen worden:

damit die Funktion $f(x)$ durch eine Substitution ersten Grades der Art in die Funktion $F(y)$ transformiert werden kann, daß den Punkten $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ beziehungsweise die Punkte $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4$ entsprechen, ist die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(1) \qquad (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) = (\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4)$$

notwendig und hinreichend. Verlangt man nur, daß die Funktion $f(x)$ überhaupt in die Funktion $F(y)$ transformiert werden kann, ohne daß über die Zuordnung der Nullpunkte eine Bestimmung getroffen wird, so ist nur erforderlich, daß das Doppelverhältnis $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$ gleich einem der sechs Doppelverhältnisse ist, die durch die vier Punkte β_ν bestimmt werden. Diese Bedingung läßt sich auch so ausdrücken: eine jede symmetrische Funktion der sechs Doppelverhältnisse, die durch die Punkte β_ν bestimmt werden, muß gleich der entsprechenden Funktion der sechs durch die Punkte α_ν bestimmten Doppelverhältnisse sein. Hierzu ist die Gleichheit der absoluten Invarianten I und I' der beiden Funktionen $f(x)$ und $F(y)$ erforderlich und hinreichend.

Es geht dies unmittelbar aus der Gleichung (17) des vorigen Paragraphen hervor, die die sechs Werte des Doppelverhältnisses als Funktion der Invariante I bestimmt.

Unter der Voraussetzung, daß die beiden absoluten Invarianten I und I' der beiden Funktionen $f(x)$ und $F(y)$ einander gleich sind, ergeben sich die Substitutionen ersten Grades, die $f(x)$ in $F(y)$ transformieren, ohne weiteres aus dem Begriff des Doppelverhältnisses. Wenn nämlich $I' = I$ ist, so muß das Doppelverhältnis $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$ einem der sechs durch die Punkte β_ν bestimmten Doppelverhältnisse gleich sein. Es bestehe etwa die Gleichung (1). Wir ersetzen nun einfach einen der vier Punkte α_ν durch einen variabeln Punkt x und den entsprechenden β_ν durch den variabeln Punkt y. Wir erhalten so die Gleichung

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 x) = (\beta_1 \beta_2 \beta_3 y)$$

Ausgeschrieben lautet sie (vgl. § 3, Nr. 15 und 16)

$$(2) \qquad \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - x)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(x - \alpha_2)} = \frac{(\beta_1 - \beta_2)(\beta_3 - y)}{(\beta_1 - \beta_3)(y - \beta_2)}.$$

Die beiden Doppelverhältnisse (1) bleiben bei den drei Vertauschungen, die in § 4, Nr. 1 angegeben sind, ungeändert. Wir können daher den Punkten $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4$ auch beziehungsweise die Punkte

$$\alpha_2 \alpha_1 \alpha_4 \alpha_3 \quad \text{oder} \quad \alpha_3 \alpha_4 \alpha_1 \alpha_2 \quad \text{oder} \quad \alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1$$

zuordnen. Wir erhalten daher noch drei weitere Substitutionen, die ebenfalls $f(x)$ in $F(y)$ transformieren.

$$\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - x)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(x - \alpha_2)} = \frac{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_4 - y)}{(\beta_2 - \beta_4)(y - \beta_1)} \tag{3}$$

$$= \frac{(\beta_3 - \beta_4)(\beta_1 - y)}{(\beta_3 - \beta_1)(y - \beta_4)} \tag{4}$$

$$= \frac{(\beta_4 - \beta_3)(\beta_2 - y)}{(\beta_4 - \beta_2)(y - \beta_3)}. \tag{5}$$

Wenn wir von den Ausnahmefällen absehen, in denen die sechs Doppelverhältnisse nicht alle untereinander verschieden sind, gibt es auch keine weitere Substitution ersten Grades, die $f(x)$ in $F(y)$ transformiert. Es steht nichts im Weg, daß wir die Punkte $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4$ beziehungsweise mit den Punkten $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ zusammenfallen lassen. In diesem Falle geht die Substitution (2) in die „identische Substitution“

$$x = y$$

über. Die drei anderen Substitutionen bewirken die Vertauschungen der Nullpunkte α_ν, die das Doppelverhältnis ungeändert lassen.

Es gibt also, wenn wir die identische Substitution mitzählen, vier Substitutionen ersten Grades, die die Funktion $f(x)$ in sich selbst transformieren.

Aus den vorausgehenden Betrachtungen ergibt sich die Möglichkeit, die Funktion $f(x)$ in eine „kanonische Form“ zu transformieren. Nehmen wir an, die Koeffizienten der Funktion $F(y)$ seien rationale Funktionen eines verfügbaren Parameters. Diesen Parameter bestimmen wir durch die Gleichung $I' = I$ und wir können dann $f(x)$ auf verschiedene Arten in $F(y)$ transformieren. Den verschiedenen Wurzeln der Gleichung, die den Parameter bestimmt, entsprechen gleichberechtigte Formen. Wenn die Funktion $F(y)$ zwei verfügbare Parameter enthält, so können wir der Transformation noch

eine Nebenbedingung auferlegen; wir können beispielsweise festsetzen, daß die Substitutionsdeterminante den Wert 1 haben soll. Infolge dieser Bestimmung treten an Stelle der einen Gleichung $I' = I$ die beiden Gleichungen $g'_2 = g_2$, $g'_3 = g_3$.

Aus der Transformation der Funktion $f(x)$ ergibt sich sofort die Transformation des Differentials erster Gattung

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

Es sei

$$x = \frac{py + p'}{qy + q'} \quad \text{und} \quad pq' - p'q = r \tag{6}$$

$$f(x) = \frac{F(y)}{(qy + q')^4} \text{ (vgl. § 3).} \tag{7}$$

Aus (6) folgt

$$dx = \frac{r\,dy}{(qy + q')^2}. \tag{8}$$

Folglich ist

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{r\,dy}{\sqrt{F(y)}}. \tag{9}$$

Wenn man es nur mit reellen Größen zu tun hat, so hat der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx}$$

dasselbe Vorzeichen wie die Substitutionsdeterminante r, folglich haben die beiden in (9) vorkommenden Quadratwurzeln dasselbe Vorzeichen.

Es sind drei verschiedene kanonische Formen des Differentials erster Gattung in Gebrauch, von denen eine jede ihre besonderen Vorzüge besitzt.

Wir wollen sie nun der Reihe nach besprechen.

§ 7. Die Weierstraßsche kanonische Form. Um zu der kanonischen Form, die Weierstraß benutzt hat, zu gelangen, knüpfen wir an die Ausführungen des § 5 an. Wir haben dort die Identität (15)

$$\varphi(x) = x^3 - 36g_2x - 432g_3 = (x - \mathsf{A})(x - \mathsf{B})(x - \Gamma)$$

aufgestellt. Um die numerischen Faktoren wegzuschaffen, setzen wir

$$x = 12y$$

und erhalten

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 3 \cdot 12^2(4y^3 - g_2 y - g_3)\\ &= 3 \cdot 12^2 \cdot 4\left(y - \tfrac{1}{12}\mathsf{A}\right)\left(y - \tfrac{1}{12}\mathsf{B}\right)\left(y - \tfrac{1}{12}\Gamma\right).\end{aligned}$$

Die Funktion

$$4y^3 - g_2 y - g_3$$

wird mit der Funktion

$$F(y) = b_0 y^4 + 4b_1 y^3 + 6b_2 y^2 + 4b_3 y + b_4$$

identisch, wenn wir

$$b_0 = 0, \quad 4b_1 = 4, \quad b_2 = 0, \quad 4b_3 = -g_2, \quad b_4 = -g_3$$

setzen. Die Invarianten der Funktion $F(y)$ besitzen die Werte (vgl. § 5, Nr. 11 und 12)

$$\begin{aligned} g_2' &= b_0 b_4 - 4b_1 b_3 + 3b_2^2 = g_2\\ g_3' &= b_0 b_2 b_4 + 2b_1 b_2 b_3 - b_0 b_3^2 - b_4 b_1^2 - b_2^3 = g_3.\end{aligned}$$

Die Invarianten der Funktion $F(y)$ haben also dieselben Werte wie die der Funktion $f(x)$, folglich kann diese Funktion durch eine Substitution ersten Grades mit der Determinante 1 in $F(y)$ transformiert werden. Die Wurzeln der Gleichung $F(y) = 0$ bezeichnet man nach Weierstraß Vorgang mit $e_1 e_2 e_3$. Sie genügen der Bedingung. (§ 5, Nr. 10)

(1) $$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Sofern sie reell sind wählt man die Bezeichnung so, daß

(2) $$e_1 > e_2 > e_3$$

ist. Weil die Wurzeln $e_1 e_2 e_3$ von der Reihenfolge abgesehen mit den drei Größen

$$\tfrac{1}{12}\mathsf{A}, \quad \tfrac{1}{12}\mathsf{B}, \quad \tfrac{1}{12}\Gamma$$

übereinstimmen, so sind die Differenzen

$$e_2 - e_3, \quad e_3 - e_1, \quad e_1 - e_2$$

von der Reihenfolge abgesehen mit den Größen

$$-\tfrac{1}{4}A, \quad -\tfrac{1}{4}B, \quad -\tfrac{1}{4}C$$

identisch (§ 4, Nr. 3).

Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ vier reelle Wurzeln oder zwei Paare konjugiert imaginäre Wurzeln besitzt, so sind die

Größen A, B, C reell und zwar hat die Größe B zufolge der in § 4 (S. 14) getroffenen Bestimmungen den größten absoluten Wert. Folglich ist

(3) $$e_1 - e_3 = \frac{1}{4} | B |.$$

Nehmen wir insbesondere an, die vier Wurzeln α_ν der Gleichung $f(x) = 0$ seien reell. Vorausgesetzt, daß der leitende Koeffizient a_0 positiv ist, ist

$$\mathsf{\Gamma} > \mathsf{B} > \mathsf{A}$$

(§ 4, Nr. 6). Wir haben also

(4) $$e_1 = \frac{1}{12}\mathsf{\Gamma}, \quad e_2 = \frac{1}{12}\mathsf{B}, \quad e_3 = \frac{1}{12}\mathsf{A} \quad \text{für } a_0 > 0$$

zu setzen. Dagegen ist

(5) $$e_1 = \frac{1}{12}\mathsf{A}, \quad e_2 = \frac{1}{12}\mathsf{B}, \quad e_3 = \frac{1}{12}\mathsf{\Gamma} \quad \text{für } a_0 < 0$$

zu setzen.

Um auch für den Fall, daß die Größen $e_1 e_2 e_3$ komplex sind, eine Bestimmung zu treffen, setzen wir fest, es soll allgemein

(3a) $$e_1 - e_3 = \pm \frac{1}{4} B$$

sein und zwar soll das Vorzeichen so gewählt werden, daß der reelle Teil der Größen $e_1 - e_3$ positiv ist, wenn er nicht verschwindet. Tritt dieser Fall ein, so soll das Vorzeichen so gewählt werden, daß $e_1 - e_3$ positiv imaginär ist.

Um die Substitution zu erhalten, die die Transformation

(6) $$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = \frac{dy}{2\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}}$$

bewirkt, müssen wir in den Gleichungen (1) bis (4) des vorigen Paragraphen für $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4$ eine Permutation der Größen $\infty, \frac{1}{12}\mathsf{A}, \frac{1}{12}\mathsf{B}, \frac{1}{12}\mathsf{\Gamma}$ substituieren und zwar ist diese Permutation so zu wählen, daß die Gleichung

(7) $$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) = -\frac{A}{B} = (\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4)$$

erfüllt ist. Wir genügen dieser Bedingung, indem wir

$$\beta_1 = \infty, \quad \beta_2 = \frac{1}{12}\mathsf{A}, \quad \beta_3 = \frac{1}{12}\mathsf{B}, \quad \beta_4 = \frac{1}{12}\mathsf{\Gamma}$$

setzen. Unter dieser Annahme ist nämlich (§ 3, Nr. 16 und § 4, Nr. 3)

$$(\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4) = -\lim_{\beta_1 = \infty} \frac{(\beta_1 - \beta_2)(\beta_3 - \beta_4)}{(\beta_1 - \beta_3)(\beta_4 - \beta_2)} = -\frac{\beta_3 - \beta_4}{\beta_4 - \beta_2} = -\frac{\mathsf{\Gamma} - \mathsf{B}}{\mathsf{A} - \mathsf{\Gamma}} = -\frac{A}{B}.$$

Substituieren wir die Werte (7) in die Gleichung (3) des vorigen Paragraphen, so ergibt sich

$$y - \frac{\mathsf{\Gamma}}{12} = \frac{1}{4} B \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_3} \frac{x - \alpha_3}{x - \alpha_2}. \tag{8}$$

Aus dieser Gleichung erhält man 23 weitere Transformationsformeln, indem man die Wurzeln $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ auf alle möglichen Arten permutiert.

Wenn die Koeffizienten der gegebenen Funktion $f(x)$ reell sind, so ist mindestens eine der drei Größen e_ν reell. Da bei Anwendung einer reellen Substitution reellen Wurzeln der Gleichung $F(y) = 0$ reelle Wurzeln der Gleichung $f(x)$ entsprechen, so können die Koeffizienten der Substitution, die $f(x)$ in $F(y)$ transformiert, nur dann reell sein, wenn die Gleichung $f(x) = 0$ höchstens ein Paar imaginäre Wurzeln besitzt.

Setzt man in den Gleichungen (1) bis (4) des vorigen Paragraphen

$$\alpha_1 = \beta_1 = \infty, \quad \alpha_2 = \beta_2 = e_1, \quad \alpha_3 = \beta_3 = e_2, \quad \alpha_4 = \beta_4 = e_3,$$

so erhält man nach einer leichten Umformung die folgenden Substitutionen, die das Differential erster Gattung

$$\frac{dy}{\sqrt{F(y)}}$$

in sich selbst transformieren:

$$\left\{\begin{aligned} &y = x, \\ &(x - e_1)(y - e_1) = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3), \\ &(x - e_2)(y - e_2) = (e_2 - e_1)(e_2 - e_3), \\ &(x - e_3)(y - e_3) = (e_3 - e_1)(e_3 - e_2). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Nehmen wir an, die drei Größen e_ν und die Variabeln x und y seien reell. Damit auch das Integral

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}}$$

einen reellen Wert besitzt, muß die Integrationsvariable y einer der beiden Bedingungen $y > e_1$ oder $e_2 > y > e_3$ genügen (vgl. (2)).

Der letztere Fall läßt sich mittels der dritten und vierten der unter (9) angegebenen Substitutionen auf den ersten zurückführen. Wir können uns also im Fall reeller Größen immer so einrichten, daß die Integrationsvariable $> e_1$ ist.

Der Vorzug der Weierstraßschen kanonischen Form besteht darin, daß ihre Koffizienten rationale Funktionen der Koeffizienten der gegebenen Funktion $f(x)$ sind und daß sie die Invarianten in Evidenz setzt.

Weil diese kanonische Form eindeutig bestimmt ist, gibt es keine mit ihr gleichberechtigte Form.

§ 8. Die Riemannsche kanonische Form. Riemann hat in seinen Vorlesungen die kanonische Form

$$\frac{dy}{2\sqrt{y(1-y)(1-k^2 y)}}$$

gebraucht. Den hier auftretenden Parameter k nennt man den „Modul“ des Integrals erster Gattung; die Größe $k' = \sqrt{1-k^2}$ bezeichnet man als „Komplement des Moduls“ oder als „komplementären Modul“.

Wir haben in diesem Fall, um die Formeln des § 6 anwenden zu können, zu setzen:

$$F(y) = 4y(1-y)(1-k^2 y), \tag{1}$$

$$b_0 = 0, \quad 4b_1 = 4k^2, \quad 6b_2 = -4(1+k^2), \quad 4b_3 = 4, \quad b_4 = 0. \tag{2}$$

Die Größen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ sind durch eine beliebig zu wählende Permutation der Größen $\infty, \frac{1}{k^2}, 1, 0$ zu ersetzen.

Zufolge der Formel Nr. 16 des § 3 ist das Doppelverhältnis

$$\left(\infty \ \tfrac{1}{k^2} \ 1 \ 0\right) = \frac{\left(\infty - \frac{1}{k^2}\right)\left(1 - 0\right)}{\left(\infty - 1\right)\left(\frac{1}{k^2} - 0\right)} = k^2. \tag{3}$$

Das Quadrat des Moduls ist demnach gleich einem der sechs Doppelverhältnisse, die die vier Punkte α_ν bestimmen.

Wir erhalten daher sechs gleichberechtigte kanonische Formen (s. § 6). Ordnen wir etwa den Nullpunkten $\infty\ \frac{1}{k^2}\ 1\ 0$ von $F(y)$ beziehungsweise die Nullpunkte $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4$ von $f(x)$ zu, so folgt aus (3) mit Rücksicht auf die erste der Gleichungen (4) des § 4

$$k^2 = (\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4) = -\frac{A}{B}. \tag{4}$$

Aus der vierten Gleichung des genannten Gleichungssystems folgt

$$(\alpha_1\,\alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_4) = \frac{1}{(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4)} = \frac{1}{k^2}.$$

In dieser Gleichung ersetzen wir α_2 durch die Variable x und dementsprechend $\frac{1}{k^2}$ durch die Variable y. Es folgt:

$$y = (\alpha_1\,\alpha_3\,x\,\alpha_4) = (x\,\alpha_4\,\alpha_1\,\alpha_3) = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_4 - \alpha_3} \cdot \frac{x - \alpha_4}{x - \alpha_1}. \tag{5}$$

Um die Substitutionsdeterminante r zu bestimmen, die in der Gleichung (9) des § 6 auftritt, gehen wir von den Gleichungen aus

$$B' = b_0\,(\beta_1 - \beta_3)\,(\beta_4 - \beta_2) = r^2 B = r^2 a_0\,(\alpha_1 - \alpha_3)\,(\alpha_4 - \alpha_2). \tag{6}$$

Im vorliegenden Falle ist zufolge der Gleichung (9) des § 3

$$\lim\ \beta_1 b_0 = -\,4 b_1 = -\,4 k^2 \ (2)$$

und

$$\beta_2 = \frac{1}{k^2}, \quad \beta_4 = 0,$$

folglich

$$B' = 4.$$

Demnach ist wegen (6)

$$r = \pm\frac{2}{\sqrt{B}} \tag{7}$$

und wir erhalten auf Grund der Gleichung (8) des § 6

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \pm\frac{2}{\sqrt{B}}\,\frac{dy}{\sqrt{F(y)}}.$$

Die Variable y ist durch die Gleichung (5), die Funktion $F(y)$ durch die Gleichungen (1) und (4) bestimmt.

Das Vorzeichen von r kann erst dann bestimmt werden, wenn die Vorzeichen der beiden Quadratwurzeln

$$\sqrt{f(x)} \text{ und } \sqrt{F(y)}$$

eindeutig fixiert sind.

Aus der Substitution (5) ergeben sich die drei anderen Substitutionen, die das gegebene Integral in dieselbe Normalform transformieren, nach der in § 6 angegebenen Regel. Die Substitutionen, die die Transformation in die übrigen fünf gleichberechtigten Normalformen bewirken, erhalten wir, indem wir die Wurzeln α_2, α_3, α_4 auf alle möglichen Arten permutieren.

§ 9. Weitere Ausführung für den Fall, daß die Wurzeln der Grundgleichung reell sind. Die Koeffizienten der Substitution, die das vorgelegte Differential erster Gattung in die Riemannsche kanonische Form transformiert, sind reell, wenn die vier Größen α_ν reell sind. Nehmen wir überdies an, auch die Integrationsvariable x sei reell und im Integrationsintervall sei $f(x)$ positiv, so können wir die Transformation so einrichten, daß die neue Integrationsvariable y der Bedingung

$$0 \leqq y \leqq 1$$

genügt und daß der Modul k reell, positiv und < 1 ist.

Damit $f(x)$ im Integrationsintervall positiv ist, darf, wenn der leitende Koeffizient a_0 positiv ist, von den Faktoren

$$x - \alpha_1, \quad x - \alpha_2, \quad x - \alpha_3, \quad x - \alpha_4$$

nun eine gerade Anzahl negativ sein; ist dagegen a_0 negativ, so muß die Anzahl der negativen Faktoren ungerade sein.

Wir stellen die den verschiedenen Fällen entsprechenden Substitutionen in einer Tabelle zusammen. Dabei halten wir an der früher eingeführten Voraussetzung fest, die Bezeichnung sei so gewählt, daß

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$$

ist.

I. $$a_0 > 0, \quad x < \alpha_4 \quad \text{oder} \quad x > \alpha_1$$

a) $$y = \frac{(\alpha_2 - \alpha_4)(x - \alpha_1)}{(\alpha_1 - \alpha_4)(x - \alpha_2)}, \quad k^2 = -\frac{C}{B}, \quad r = \frac{1}{\sqrt{-B}},$$

b) $$y = \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)(x - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_4)(x - \alpha_3)}, \quad k^2 = -\frac{C}{B}, \quad r = -\frac{1}{\sqrt{-B}},$$

II. $$a_0 > 0, \quad \alpha_2 > x > \alpha_3,$$

a) $y = \dfrac{(\alpha_2 - \alpha_4)(x - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_3)(x - \alpha_4)}, \quad k^2 = -\dfrac{C}{B}, \quad r = \dfrac{1}{\sqrt{-B}},$

b) $y = \dfrac{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - x)}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - x)}, \quad k^2 = -\dfrac{C}{B}, \quad r = -\dfrac{1}{\sqrt{-B}},$

III. $$a_0 < 0, \quad \alpha_1 > x > \alpha_2,$$

a) $y = \dfrac{(\alpha_1 - \alpha_3)(x - \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(x - \alpha_3)}, \quad k^2 = -\dfrac{A}{B}, \quad r = \dfrac{1}{\sqrt{B}},$

b) $y = \dfrac{(\alpha_2 - \alpha_4)(\alpha_1 - x)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(x - \alpha_4)}, \quad k^2 = -\dfrac{A}{B}, \quad r = -\dfrac{1}{\sqrt{B}},$

IV. $$a_0 < 0, \quad \alpha_3 > x > \alpha_4,$$

a) $y = \dfrac{(\alpha_1 - \alpha_3)(x - \alpha_4)}{(\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_1 - x)}, \quad k^2 = -\dfrac{A}{B}, \quad r = \dfrac{1}{\sqrt{B}},$

b) $y = \dfrac{(\alpha_2 - \alpha_4)(\alpha_3 - x)}{(\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_2 - x)} \quad k^2 = -\dfrac{A}{B} \quad r = -\dfrac{1}{\sqrt{B}}.$

Setzen wir fest, daß die Quadratwurzeln $\sqrt{f(x)}$ und $\sqrt{F(y)}$ positiv genommen werden sollen, so ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = r \int \frac{dy}{\sqrt{F(y)}} = r \int \frac{dy}{2\sqrt{y(1-y)(1-k^2 y)}}.$$

Der Vollständigkeit wegen fügen wir die Werte der Invarianten A, B, C hinzu.

$$A = a_0(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4) \qquad B = a_0(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)$$
$$C = a_0(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_3).$$

Zu den vorstehenden Formeln ist zu bemerken:

Wie in § 4 gezeigt worden ist, ist

$$\frac{B}{a_0}$$

negativ,

$$\frac{A}{a_0} \text{ und } \frac{C}{a_0}$$

sind positiv und B ist dem absoluten Wert nach größer als A und C.

Hieraus folgt, daß in allen Fällen r reell und k^2 reell, positiv und < 1 ist. Daß die Integrationsvariable y in das Intervall $0, 1$ fällt, ist ohne weiteres ersichtlich. In den mit a) bezeichneten Fällen nehmen die Variabeln x und y gleichzeitig zu, in den mit b) bezeichneten entspricht einer Zunahme von x eine Abnahme von y.

Der Fall $a_0 = 0$ ist als Grenzfall zu betrachten. Lassen wir α_1 unbegrenzt wachsen, so ist (§ 3, Nr. 9)

$$\lim a_0 \alpha_1 = -4a_1.$$

Wir haben daher, wenn a_1 positiv ist, die Formeln III oder die Formeln IV anzuwenden, je nachdem

$$x > \alpha_2 \quad \text{oder} \quad \alpha_3 > x > \alpha_4$$

ist. Ist a_1 negativ, so sind die Formeln I oder II anzuwenden, je nachdem

$$x < \alpha_4 \quad \text{oder} \quad \alpha_2 > x > \alpha_3$$

ist.

§ 10. Die Legendresche kanonische Form. Zu einer dritten kanonischen Form gelangen wir, wenn wir fordern, daß in der transformierten Form $F(y)$ nur die geraden Potenzen von y vorkommen sollen. Wir setzen, über den einen der drei übrigen Koeffizienten verfügend

$$F(y) = (1 - \mu^2 y^2)(1 - \nu^2 y^2) \tag{1}$$

und erhalten (§ 3 Nr. 16)

$$\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}, -\frac{1}{\nu}, -\frac{1}{\mu}\right) = \frac{\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu}\right)\left(-\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu}\right)}{\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}\right)\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu}\right)} = \left(\frac{\nu - \mu}{\nu + \mu}\right)^2. \tag{2}$$

Jedem der sechs Werte des Doppelverhältnisses der vier Punkte $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ entsprechen zwei Werte des Quotienten

$$\varkappa = \frac{\mu}{\nu}. \tag{3}$$

Über die eine der beiden Größen μ, ν kann noch verfügt werden.

Wir erhalten demnach zwölf gleichberechtigte kanonische Formen. Ordnen wir etwa den Punkten $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ beziehungsweise die Punkte $\frac{1}{\mu}\ \frac{1}{\nu}\ -\frac{1}{\nu}\ -\frac{1}{\mu}$ zu, so erhalten wir zur Bestimmung des Quotienten $\varkappa$ (3) die Gleichung

$$\left(\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right)^2 = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) = -\frac{A}{B} \qquad (\S\ 4,\ \text{Nr. } 4). \tag{4}$$

Eine der Substitutionen, durch die die Transformation bewirkt wird, lautet

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 x) = \left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}, -\frac{1}{\nu}, y\right) \tag{5}$$

oder ausgeschrieben

$$(6)\qquad \frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_3}\cdot\frac{x-\alpha_3}{\alpha_2-x}=\frac{\nu-\mu}{\nu+\mu}\frac{1+\nu y}{1-\nu y}.$$

Die übrigen ergeben sich durch Permutation der Größen $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$. Um die Substitutionsdeterminante r zu bestimmen, benützen wir wieder die Gleichung

$$(7)\qquad r^2B=r^2a_0(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_2)=B'=$$
$$=\mu^2\nu^2\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}\right)\left(-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu}\right)$$

aus der

$$(8)\qquad r=\pm\frac{\mu+\nu}{\sqrt{-B}}$$

folgt. Sofern wir auf die Realitätsverhältnisse keine Rücksicht nehmen, steht nichts im Weg

$$\nu=1 \quad\text{und dementsprechend}\quad \mu=\varkappa$$

zu setzen (3). Wir erhalten so die Gleichung

$$(9)\qquad \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=\pm\frac{1+\varkappa}{\sqrt{-B}}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\varkappa^2y^2)}}.$$

Man bezeichnet diese kanonische Form des Differentials erster Gattung als Legendresche Normalform.

Wenn die Größen $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ reell und nach absteigender Größe geordnet sind, so ist der Quotient $-\frac{A}{B}$ reell, positiv und < 1. Folglich genügt der Gleichung (4) ein reeller, positiver Wert $\varkappa$, der < 1 ist.

Die Legendresche Normalform nimmt eine besonders einfache Gestalt an, wenn wir trigonometrische Funktionen einführen. Setzen wir

$$y=\sin\varphi$$

so folgt

$$(10)\qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\varkappa^2y^2)}}=\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}.$$

§ 11. Beziehungen zwischen den verschiedenen kanonischen Formen des Differentials erster Gattung. Der einen Weierstraßschen kanonischen Form stehen sechs gleichberechtigte Riemannsche kanonische Formen gegenüber (§ 7 und 8). In jede dieser letzteren Formen kann die

Weierstraßsche Normalform durch vier verschiedene lineare Substitutionen übergeführt werden.

Es ist üblich, die folgende Substitution zu bevorzugen:

$$(1)\qquad y - e_3 = \frac{e_1 - e_3}{z} \qquad z = \frac{e_1 - e_3}{y - e_3}.$$

Setzen wir

$$(2)\qquad \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} = k \qquad \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}} = k'$$

so folgt

$$(3)\qquad y - e_1 = (e_1 - e_3)\frac{1 - z}{z} \qquad y - e_2 = (e_1 - e_3)\frac{1 - k^2 z}{z}$$

und weiter

$$(4)\qquad \frac{dy}{2\sqrt{(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}} = -\frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}\,\frac{dz}{2\sqrt{z(1 - z)(1 - k^2 z)}}.$$

Wenn wir die Weierstraßsche kanonische Form als gegeben betrachten, so sind die Moduln k und k' durch die Gleichungen (2) bestimmt; betrachten wir dagegen die Riemannsche Normalform als gegeben, so bestimmen die Gleichungen (2) nur die Verhältnisse der Größen e_ν.

Wenn die Größen $e_1 e_2 e_3$ reell und nach absteigender Größe geordnet sind, so sind die in den Gleichungen (2) auftretenden Quadratwurzeln reell. Wählen wir sie positiv, so erhalten wir für den Modul k und den komplementären Modul k' reelle positive Werte, die < 1 sind. Wächst die Variable y durch reelle Werte von e_1 bis $+\infty$, so nimmt die Variable z von 1 bis 0 ab.

Da es zwölf gleichberechtigte Legendresche kanonische Formen gibt (vgl. den vorigen Paragraphen), so gibt es $4 \cdot 12 = 48$ Substitutionen ersten Grades, die die Weierstraßsche kanonische Form in eine Legendresche transformieren. Wir können jedoch den Übergang von der Weierstraßschen Form zur Legendreschen noch auf andere Weise bewerkstelligen: wir gehen von der Weierstraßschen Normalform zunächst zur Riemannschen über und wenden dann die quadratische Transformation

$$(5)\qquad z = t^2$$

an. Wir erhalten

$$(6)\qquad \frac{dz}{2\sqrt{z(1 - z)(1 - k^2 z)}} = \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}.$$

Es ist wesentlich zu bemerken, daß der hier auftretende Modul k von der Größe $\varkappa$, die in der Normalform (8) des vorigen Paragraphen vorkommt, verschieden ist: der Modul k ist gleich der Quadratwurzel aus einem der sechs Doppelverhältnisse, andererseits ist

$$\left(\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right)^2$$

gleich einem dieser sechs Werte.

Wenn wir im folgenden die Riemannsche und die Legendresche kanonische Form nebeneinander gebrauchen, so setzen wir immer voraus, daß der Zusammenhang zwischen ihnen durch die Substitution zweiten Grades (5) vermittelt wird.

Wenn die Größen $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ reell sind und die ganze Funktion $f(x)$ reell und positiv ist, so können wir die Substitution, die das vorgelegte Differential erster Gattung in die Riemannsche Normalform überführt, so wählen, daß die neue Integrationsvariable z auf das Intervall 0,1 beschränkt ist (§ 9); die entsprechenden Werte von t (5) gehören dem Intervall $-1, +1$ an.

§ 12. Reelle quadratische Transformation in die Legendresche kanonische Form. Die Transformation ersten Grades eines vorgelegten Differentials erster Gattung in die Riemannsche kanonische Form ist nur dann reell, wenn die Gleichung $f(x) = 0$ vier reelle Wurzeln besitzt; die Transformation ersten Grades in die Weierstraßsche kanonische Form ist nur dann reell, wenn diese Gleichung wenigstens zwei reelle Wurzeln besitzt. Wir wollen nun zeigen, daß das vorgelegte Differential erster Gattung immer durch eine *reelle quadratische* Substitution in die Legendresche kanonische Form transformiert werden kann, wenn nur die Koeffizienten der Funktion $f(x)$ reell sind und nur solche (reelle) Werte der Variabeln x in Betracht gezogen werden, für die $f(x)$ positiv ist.

Der Fall, daß die vier Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ reell sind, hat bereits im vorausgehenden seine Erledigung gefunden, wir schließen ihn daher im folgenden aus, haben also nur noch die beiden Fälle zu unterscheiden, daß zwei Paare konjugiert imaginärer Wurzeln oder daß ein Paar reelle Wurzeln und ein

Paar imaginäre auftreten. Wir behalten die in § 4, S. 14 eingeführte Bezeichnungsweise bei, nehmen also im ersten Fall an:

I. α_1 und α_4, α_2 und α_3 sind konjugiert imaginär;

die Größen $\frac{\alpha_1 - \alpha_4}{i}$ und $\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{i}$ sind positiv;

der Koeffizient a_0 muß positiv sein;

das Doppelverhältnis $-\frac{A}{B}$ ist reell, positiv und < 1.

Im zweiten Fall nehmen wir an:

II. die Größen α_1 und α_4 sind reell; das Produkt $a_0(\alpha_1 - \alpha_4)$ ist positiv;

die Größen α_2 und α_3 sind konjugiert imaginär; $\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{i}$ ist positiv.

Der Koeffizient a_0 kann positiv oder negativ sein.

Die Größen A und $-B$ sind konjugiert imaginär; $\frac{A+B}{i}$ ist negativ;

Der absolute Betrag des Quotienten $-\frac{A}{B}$ ist $= 1$.

Wir führen zunächst die in § 10 besprochene Substitution (5)

$$(1) \qquad (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 x) = \left(\frac{1}{\mu},\ \frac{1}{\nu},\ -\frac{1}{\nu},\ y\right)$$

aus und setzen

$$(2) \qquad \nu = -i, \quad \mu = \varkappa\nu = -i\varkappa.$$

Die Größe $\varkappa$ genügt der Gleichung (§ 10, Nr. 4)

$$(3) \qquad \left(\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right)^2 = -\frac{A}{B}.$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind zueinander reziprok. Im Fall I sind sie reell und positiv; wir bezeichnen mit $\varkappa$ die kleinere derselben.

Es ist also im Fall I

$$(4\,\mathrm{I}) \qquad \varkappa \text{ reell, positiv und } < 1.$$

Im Fall II sind die Wurzeln der Gleichung (3) rein imaginär; die eine ist positiv, die andere negativ imaginär (weil der absolute Betrag des Quotienten $-\frac{A}{B}$ gleich 1 ist). Wir können daher festsetzen: im Fall II sei

(4 II) $\varkappa$ rein imaginär und zwar negativ imaginär, also $\mu = -\varkappa i$ reell und negativ.

Das Quadrat der Substitutionsdeterminante r ist durch die Gleichung

(5) $$r^2 B = B' = -(\mu + \nu)^2 = (1 + \varkappa)^2$$

bestimmt (§ 10, Nr. 8).

Im Falle I ist ohne weiteres ersichtlich, daß die Größe r reell ist, denn in diesem Fall sind die Größen B und $1 + \varkappa$ reell und positiv (4 I).

Zum Fall II ist zu bemerken: aus (3) und (5) folgt

(6) $$-r^2 A = (1 - \varkappa)^2.$$

Weil die Größen $-A$ und B und die Größen $1 + \varkappa$ und $1 - \varkappa$ konjugiert imaginär sind (II und 4 II), so folgt aus (5) und (6), daß r^2 reell ist, und weil die imaginären Bestandteile der Größen B und $\varkappa$ dasselbe Vorzeichen besitzen, so muß r^2 positiv sein. Die Größe r ist somit auf jeden Fall reell.

Die Substitution (1) ordnet jedem reellen Wert x einen reellen Wert y zu. Folglich sind die Verhältnisse der Substitutionskoeffizienten reell.

Zum Beweise bemerken wir: weil den Werten

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \text{ beziehungsweise die Werte } \frac{1}{\mu}\ \frac{1}{\nu}\ -\frac{1}{\nu}\ -\frac{1}{\mu}$$

entsprechen, können wir die Substitution (1) auch in jeder der beiden Formen

(7) $$(\alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 x) = \left(-\frac{1}{\mu},\ -\frac{1}{\nu},\ \frac{1}{\nu},\ y\right)$$

und

(8) $$(\alpha_1 \alpha_3 \alpha_2 x) = \left(\frac{1}{\mu},\ -\frac{1}{\nu},\ \frac{1}{\nu},\ y\right)$$

schreiben. Nun ersetzen wir in der Gleichung (1) jede Größe durch die konjugiert imaginäre; die Größe x nehmen wir als reell an, den zu y konjugiert imaginären Wert bezeichnen wir mit y_0.

Im Fall I erhalten wir, weil die Größen μ und ν rein imaginär sind,

$$(\alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 x) = \left(-\frac{1}{\mu},\ -\frac{1}{\nu},\ \frac{1}{\nu},\ y_0\right).$$

Der Vergleich mit (7) ergibt $y = y_0$, also y reell.

Im Fall II erhalten wir, weil $\mu = -\varkappa i$ reell (4 II) und $\nu = -i$ ist,

$$(\alpha_1 \alpha_3 \alpha_2 x) = \left(\frac{1}{\mu}, \quad -\frac{1}{\nu}, \quad \frac{1}{\nu}, \quad y_0\right).$$

Aus (8) folgt, daß $y = y_0$, also reell ist.

Da der Größe α_2, deren imaginärer Bestandteil positiv imaginär ist, die positiv imaginäre Größe $\frac{1}{\nu} = i$ entspricht, so ist die Substitutionsdeterminante r positiv.*) Es ist daher (5)

$$r = \sqrt{\frac{(1+\varkappa)^2}{B}} \tag{9}$$

wo die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist.

Aus § 6, Nr. 8 und § 10, Nr. 1 folgt mit Rücksicht auf (2)

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{\frac{(1+\varkappa)^2}{B}} \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+\varkappa^2 y^2)}}. \tag{10}$$

Im Fall I wenden wir nun die quadratische Substitution an

$$y = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = tg\varphi, \quad z = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \sin\varphi \tag{11 I}$$

und setzen

$$k = \sqrt{1-\varkappa^2}. \tag{12 I}$$

Weil $\varkappa$ reell und < 1 ist, so gilt dasselbe für k.

Zu den Formeln (11 I) ist zu bemerken: das Vorzeichen der Quadratwurzeln ist so zu wählen, daß die Variabeln y und z dasselbe Vorzeichen besitzen. Den Winkel φ wählen wir innerhalb des Intervalls $-\frac{\pi}{2}, \ +\frac{\pi}{2}$.

Setzen wir die Werte (11 I) in (10) ein, so folgt:

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1+\varkappa}{\sqrt{B}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{1+\varkappa}{\sqrt{B}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{13 I}$$

Im Fall II setzen wir

$$y = \frac{1}{\mu}\sqrt{1-z^2} = \frac{1}{\mu}\cos\varphi, \quad z = \sqrt{1-\mu^2 y^2} = \sin\varphi, \tag{11 II}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2}}. \tag{12 II}$$

*) Setzen wir, unter $p q p' q' x_1 x_2 y_1 y_2$ reelle Größen verstehend

$$x_1 + i x_2 = \frac{p(y_1+iy_2)+p'}{q(y_1+iy_2)+q'} \text{ so folgt } x_2 = \frac{(pq'-p'q)y_2}{\sqrt{(qy_1+q')^2+q^2y_2^2}}.$$

Es ist also $r = pq' - p'q$ positiv, wenn x_2 und y_2 dasselbe Vorzeichen besitzen.

Bezüglich der Vorzeichen und der Bestimmung von φ gilt das oben festgesetzte, wobei zu beachten ist, daß μ negativ ist (4 II). Wir erhalten

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{\frac{(1+\varkappa)^2}{B}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$
$$= \sqrt{\frac{(1+\varkappa)^2}{B}} \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Zufolge (3) ist

$$\frac{(1+\varkappa)^2}{B} \cdot \frac{1}{1-\varkappa^2} = \frac{1}{B}\sqrt{-\frac{B}{A}} = \frac{1}{\sqrt{-AB}}.$$

Wir können deshalb die vorhergehende Gleichung auch in der Form schreiben

$$\text{(13 II)} \qquad \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{-AB}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt[4]{-AB}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Den Transformationsformeln (1), (11 I) und (11 II) können wir eine sehr übersichtliche Gestalt geben. Zu dem Zwecke schreiben wir die Substitution (1) in der Form

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_4 x) = \left(\frac{1}{\mu}, \quad \frac{1}{\nu}, \quad -\frac{1}{\mu}, y\right)$$

oder ausführlich geschrieben (vgl. § 3, Nr. 16)

$$\text{(14)} \quad \frac{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_4-x)}{(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-x)} = \frac{\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu}\right)\left(-\frac{1}{\mu}-y\right)}{\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{\nu}-y\right)} = \frac{(\mu-\nu)(1+\mu y)}{2\mu(1-\nu y)}.$$

Vertauschen wir in dieser Gleichung α_1 mit α_2, α_3 mit α_4 und dementsprechend μ mit ν, so folgt

$$\frac{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-x)}{(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-x)} = \frac{(\nu-\mu)(1+\nu y)}{2\nu(1-\mu y)}.$$

Dividieren wir die Gleichung (14) durch die vorstehende, so folgt

$$\text{(15)} \quad \frac{(\alpha_2-\alpha_3)\cdot(x-\alpha_1)(x-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_4)\cdot(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)} = \frac{\nu(1-\mu^2y^2)}{\mu(1-\nu^2y^2)} = \frac{1}{\varkappa}\,\frac{1+\varkappa^2y^2}{1+y^2}.$$

$(x-\alpha_1)(x-\alpha_4)$ und $(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$ sind die beiden reellen quadratischen Faktoren, in die die Funktion $f(x)$ zerlegt wer-

den kann. Im Fall I sind die beiden Faktoren positiv, sofern x reell ist. Im Fall II ist der zweite Faktor positiv, der erste hat, damit $f(x)$ positiv ist, dasselbe Vorzeichen wie a_0 oder was dasselbe sagen will, wie $\alpha_1 - \alpha_4$ (II).

Die Größe

$$\varkappa \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_4}$$

ist zufolge unserer Festsetzungen auf jeden Fall reell (vgl. I, II, 4 I, 4 II). Im Fall I ist sie positiv, im Fall II ist $\varkappa(\alpha_2 - \alpha_3)$ reell und positiv. Folglich ist der Quotient

$$\frac{1 + y^2}{1 + \varkappa^2 y^2}$$

jedenfalls reell und positiv, wenn x reell ist.

Bei Benutzung der Substitutionen (11 I) und (11 II) ergibt sich aus (15)

$$\varkappa \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_4} \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_4)}{(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)} = \begin{cases} 1 - k^2 \sin^2 \varphi & \text{im Fall I} \\ \dfrac{(1 - k^2)\sin^2 \varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} & \text{im Fall II.} \end{cases} \tag{16}$$

Wir stellen die Schlußformeln, zu denen wir gekommen sind, und die Voraussetzungen, auf denen sie beruhen, übersichtlich zusammen.

Im Fall I wird vorausgesetzt

α_1 und α_4 konjugiert imaginär, ebenso α_2 und α_3,

$\frac{\alpha_1 - \alpha_4}{i}$ und $\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{i}$ positiv,

$\varkappa$ reell, positiv und < 1, $k = \sqrt{1 - \varkappa^2}$.

Im Fall II wird vorausgesetzt

α_1 und α_4 reell, $a_0(\alpha_1 - \alpha_4)$ positiv,

α_2 und α_3 konjugiert imaginär, $\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{i}$ positiv,

$\varkappa = \mu i$, μ reell und negativ, $k = \frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$.

Die Größe $\varkappa$ ist Wurzel der Gleichung

$$\left(\frac{1 - \varkappa}{1 + \varkappa}\right)^2 = -\frac{A}{B} = -\frac{a_0(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)}{a_0(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)}.$$

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \begin{cases} \dfrac{1 + \varkappa}{\sqrt{B}} \dfrac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} & \text{im Fall I} \\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{-AB}} \dfrac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} & \text{im Fall II.} \end{cases} \tag{17}$$

§ 13. Die elliptischen Funktionen. Am Schluß des § 2 haben wir das Integral erster Gattung nur bis auf eine multiplikative und eine additive Konstante bestimmt. Über diese wollen wir jetzt verfügen; wir setzen

$$v = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{1}$$

und bezeichnen dieses Integral als Legendresches Normalintegral erster Gattung. Die Variable x beschränken wir vorerst auf reelle Werte, die dem Intervall

$$-1 \leqq x \leqq 1$$

angehören. Die Wurzel ist positiv zu nehmen.

Setzen wir (vgl. § 10, Nr. 10)

$$x = \sin\varphi$$

so folgt

$$v = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{2}$$

Solange φ auf reelle Werte beschränkt bleibt, ist offenbar v einwertige Funktion der Variabeln φ, aber es ist auch umgekehrt φ eine einwertige Funktion der Variabeln v. Man bezeichnet nach Legendres Vorgang φ als „Amplitude“ von v, in Zeichen

$$\varphi = \operatorname{am} v. \tag{3}$$

Wächst φ um $\frac{\pi}{2}$, so wächst v um die Größe

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \tag{4}$$

Folglich ist mit Rücksicht auf (3)

$$\operatorname{am}(v+K) = \operatorname{am} v + \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Die Größen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ sind als einwertige Funktionen von φ auch einwertige Funktionen der Variabeln v.

Diese Funktionen bezeichnet man als elliptische Funktionen.

Jacobi, der diese Funktionen in die Analysis eingeführt hat, bezeichnet sie mit $\sin \operatorname{am} v$, $\cos \operatorname{am} v$, $\Delta \operatorname{am} v$.

In neuerer Zeit gebraucht man hierfür vielfach nach Gudermanns Vorgang die kürzeren Bezeichnungen $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$.

Sofern es notwendig erscheint den Modul anzugeben, schreiben wir ausführlicher $\operatorname{sn}(v,k)$, $\operatorname{cn}(v,k)$, $\operatorname{dn}(v,k)$.

Die Funktion $\operatorname{sn} v$ ist eine ungerade Funktion, die Funktionen $\operatorname{cn} v$ und $\operatorname{dn} v$ sind gerade. Aus der Definition der elliptischen Funktionen ergeben sich sofort die Gleichungen

$$\operatorname{sn}^2 v + \operatorname{cn}^2 v = 1, \quad \operatorname{dn}^2 v + k^2 \operatorname{sn}^2 v = 1, \tag{6}$$
$$\operatorname{dn}^2 v - k^2 \operatorname{cn}^2 v = 1 - k^2 = k'^2.$$

Die elliptischen Funktionen können als Verallgemeinerungen der trigonometrischen Funktionen betrachtet werden: für $k = 0$ gehen sie in dieselben über. Für $k = 0$ ist nämlich

$$\operatorname{am} v = v \quad \text{also} \quad \operatorname{sn} v = \sin v, \quad \operatorname{cn} v = \cos v, \quad \operatorname{dn} v = 1.$$

Die elliptischen Funktionen sind ebenso wie die trigonometrischen periodisch. Aus (5) folgt nämlich

$$\operatorname{sn}(v + 4K) = \operatorname{sn} v, \quad \operatorname{cn}(v + 4K) = \operatorname{cn} v, \quad \operatorname{dn}(v + 4K) = \operatorname{dn} v.$$

Um die Derivirten der elliptischen Funktionen zu bestimmen, bemerken wir, daß zufolge (2)

$$\frac{d\varphi}{dv} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \operatorname{dn} v$$

ist. Hieraus folgt

$$\frac{d \operatorname{sn} v}{dv} = \frac{d \sin\varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dv} = \cos\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v.$$

Analog ergibt sich

$$\frac{d \operatorname{cn} v}{dv} = \frac{d \cos\varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dv} = -\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v$$

und

$$\frac{d \operatorname{dn} v}{dv} = -\frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \frac{d\varphi}{dv} = -k^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v.$$

Wir stellen diese drei Formeln zusammen.

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\,\mathrm{sn}\,v}{dv} = \mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v \\[2mm] \dfrac{d\,\mathrm{cn}\,v}{dv} = -\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v \\[2mm] \dfrac{d\,\mathrm{dn}\,v}{dv} = -\,k^2\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v\,. \end{cases}$$

Wir sind zu den elliptischen Funktionen gelangt, indem wir von der Legendreschen kanonischen Form der Integrale erster Gattung ausgegangen sind. Wir gelangen zu einer anderen elliptischen Funktion, wenn wir die Weierstraßsche kanonische Form zu Grunde legen. Wir setzen

$$(8)\qquad u = \int_x^\infty \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

und bezeichnen dieses Integral als Weierstraßsches Normalintegral erster Gattung. Zwischen den Integralen u und v besteht die Beziehung (§ 11, Nr. 4 und 6)

$$(9)\qquad u = \frac{v}{\sqrt{e_1 - e_3}}\,.$$

Wir nehmen an, die Größen $e_1 e_2 e_3$ seien reell und zwar sei $e_1 > e_2 > e_3$. Wenn wir die Variable x auf reelle Werte $> e_1$ beschränken, so ist der Integralwert u einwertige Funktion der unteren Grenze x und umgekehrt ist x einwertige Funktion von u.

Weierstraß bezeichnet diese Funktion von u mit

$$(10)\qquad x = p(u)\,.$$

Zwischen der Weierstraßschen p-Funktion und den Jacobischen Funktionen bestehen die Beziehungen (§ 11, Nr. 3 und 5)

$$(11)\qquad p(u) - e_3 = \frac{e_1 - e_3}{\mathrm{sn}^2 v} \qquad p(u) - e_1 = (e_1 - e_3)\frac{\mathrm{cn}^2 v}{\mathrm{sn}^2 v}$$

$$p(u) - e_2 = (e_1 - e_3)\frac{\mathrm{dn}^2 v}{\mathrm{sn}^2 v}\,.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen erhalten wir

$$(12)\qquad \mathrm{sn}\,v = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{p(u) - e_3}} \quad \mathrm{cn}\,v = \frac{\sqrt{p(u) - e_1}}{\sqrt{p(u) - e_3}} \quad \mathrm{dn}\,v = \frac{\sqrt{p(u) - e_2}}{\sqrt{p(u) - e_3}}\,.$$

§ 14. Das Additionstheorem. Wir haben im vorausgehenden auf die Analogie zwischen den elliptischen und den trigonometrischen Funktionen hingewiesen. Diese Analogie zeigt sich auch darin, daß für die elliptischen Funktionen ebenso wie für die trigonometrischen ein „Additionstheorem" besteht. Die trigonometrischen Funktionen der Winkelsumme lassen sich bekanntlich rational durch die trigonometrischen Funktionen der Summanden darstellen; analog lassen sich die elliptischen Funktionen $\mathrm{sn}(u+v)$ $\mathrm{cn}(u+v)$ $\mathrm{dn}(u+v)$ rational durch die elliptischen Funktionen der Variabeln u und v darstellen. Um die Analogie mehr hervortreten zu lassen, wollen wir zunächst die bekannte Formel für $\sin(u+v)$ in der Weise ableiten, daß wir von der Definition der Funktion arc sin durch ein bestimmtes Integral ausgehen. Wir setzen, unter x, y Variable verstehend, deren absoluter Betrag < 1 ist

$$u = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \qquad v = \int_0^y \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{1}$$

Wir bestimmen nun y als Funktion von x durch die Gleichung

$$u + v = C, \tag{2}$$

wo C eine Konstante bedeutet.

Aus (2) folgt:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \tag{3}$$

oder anders geschrieben

$$\sqrt{1-y^2}\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0. \tag{4}$$

Nun ist die linke Seite der vorstehenden Gleichung identisch gleich

$$d\left(x\sqrt{1-y^2}\right) + d\left(y\sqrt{1-x^2}\right) - \frac{xy\,dy}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{xy\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Mit Rücksicht auf (3) folgt

$$d\left[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right] = 0$$

also

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = c, \tag{5}$$

wo c eine Konstante bedeutet.

Aus (5) folgt für $y = 0$ $x = c$, und aus (1) und (2) folgt sodann

$$u = \int_0^c \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = C.$$

Das Additionstheorem der Sinus-Funktion läßt sich demnach in der Form aussprechen:

Wenn zwischen den oberen Integrationsgrenzen x, y der Integrale u, v die Beziehung (5) besteht, so besteht zwischen den Integralen selbst die Beziehung

$$\int_0^x \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} + \int_0^y \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \int_0^c \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Wir wenden nun genau denselben Gedankengang auf die Integrale

$$(6) \quad u = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} \quad \text{und} \quad v = \int_0^y \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

an. Zur Abkürzung setzen wir

$$(7) \quad \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)} = s \quad \text{und} \quad \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)} = t.$$

Wir gehen wieder von der Gleichung

$$(8) \qquad u + v = C$$

aus; aus dieser folgt

$$(9) \qquad \frac{dx}{s} + \frac{dy}{t} = 0.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir nun, entsprechend dem oben eingeschlagenen Verfahren, mit s und t, aber außerdem noch mit einer Funktion m der Variabeln x und y, über die wir uns die weitere Verfügung vorbehalten. Nun ist

$$mt\,dx = d(xmt) - \frac{\partial m}{\partial x} xt\,dx - x\left(\frac{\partial m}{\partial y} t + mt'\right) dy$$

oder da (7)

$$t' = \frac{-(1 + k^2)y + 2k^2 y^3}{t}$$

ist

$$mt\,dx = d(xmt) - \frac{\partial m}{\partial x} xt\,dx - x \frac{\frac{\partial m}{\partial y} t^2 - (1 + k^2) ym + 2k^2 y^3 m}{t} dy.$$

Dementsprechend ist

$$ms\,dy = d(yms) - \frac{\partial m}{\partial y} ys\,dy - y\frac{\frac{\partial m}{\partial x}s^2 - (1+k^2)xm + 2k^2x^3m}{s}dx.$$

Diese Werte setzen wir in die Gleichung (9)

$$mt\,dx + ms\,dy = 0$$

ein und erhalten

$$(10)\quad d[m(xt+ys)] = \left[x\frac{\partial m}{\partial x}t\,dx + y\frac{\partial m}{\partial y}s\,dy\right] +$$

$$+\left[y\frac{\frac{\partial m}{\partial x}s^2 - (1+k^2)\,xm + 2k^2x^3m}{s}dx + \right.$$

$$\left. + x\frac{\frac{\partial m}{\partial y}t^2 - (1+k^2)\,ym + 2k^2y^3m}{t}dy\right].$$

Die zur Verfügung stehende Funktion m bestimmen wir nun durch die beiden Differentialgleichungen

$$(11)\qquad x\frac{\partial m}{\partial x} = y\frac{\partial m}{\partial y}$$

$$(12)\qquad y\frac{\partial m}{\partial x}s^2 + 2k^2x^3ym = x\frac{\partial m}{\partial y}t^2 + 2k^2xy^3m.$$

Es verschwinden dann auf Grund der Gleichung (9) die beiden Terme auf der rechten Seite der Gleichung (10) und es folgt

$$(13)\qquad m(xt+ys) = c$$

wo c die Integrationskonstante bedeutet.

Wir haben nun noch die beiden Differentialgleichungen (11) und (12) zu integrieren. Aus (11) folgt, daß m eine Funktion der e i n e n Variabeln xy ist. Es ist demnach

$$\frac{\partial m}{\partial x} = m'y \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial m}{\partial y} = m'x.$$

Wir substituieren diese Werte in (12) und erhalten

$$(y^2s^2 - x^2t^2)\,m' + 2k^2xy\,(x^2 - y^2)\,m = 0.$$

Nach einer leichten Umformung folgt mit Rücksicht auf (7)

$$\frac{m'}{m} = \frac{2k^2xy}{1 - k^2x^2y^2}.$$

Wir können demnach

$$m = \frac{1}{1 - k^2x^2y^2}$$

setzen. Substituieren wir diesen Wert und die Werte (7) von s und t in (13), so folgt

$$(14)\qquad \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}=c.$$

Für $y=0$ wird $x=c$ und wegen (6) und (8)

$$u=C=\int_0^c \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Wir haben daher den Satz: **Besteht zwischen den oberen Integrationsgrenzen x, y der Integrale u, v die Gleichung (14), so besteht die Beziehung:**

$$(15)\qquad \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}+\int_0^y \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=$$
$$=\int_0^c \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Indem wir die elliptischen Funktionen der Argumente u und v einführen, können wir den Inhalt der vorstehenden Gleichung auch in der Form aussprechen:

$$(16)\qquad \operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v}.$$

Um analoge Formeln für die Funktionen $\operatorname{cn}(u+v)$ und $\operatorname{dn}(u+v)$ abzuleiten, benutzen wir die Gleichungen (Nr. 6 des vorigen Paragraphen)

$$\operatorname{cn}^2(u+v)=1-\operatorname{sn}^2(u+v)\qquad \operatorname{dn}^2(u+v)=1-k^2\operatorname{sn}^2(u+v).$$

Aus der Identität

$$1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v=\operatorname{sn}^2u\operatorname{dn}^2v+\operatorname{cn}^2u=\operatorname{sn}^2v\operatorname{dn}^2u+\operatorname{cn}^2v$$

folgt

$$(17)\quad (1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v)^2=(\operatorname{cn}^2u+\operatorname{sn}^2u\operatorname{dn}^2v)(\operatorname{cn}^2v+\operatorname{sn}^2v\operatorname{dn}^2u)$$

und aus der Identität

$$1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v=\operatorname{dn}^2u+k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{cn}^2v=\operatorname{dn}^2v+k^2\operatorname{sn}^2v\operatorname{cn}^2u$$

folgt

$$(18)\qquad (1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v)^2=$$
$$(\operatorname{dn}^2u+k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{cn}^2v)(\operatorname{dn}^2v+k^2\operatorname{sn}^2v\operatorname{cn}^2u).$$

Aus der Gleichung (16) folgt mit Rücksicht auf (17)

$$\operatorname{cn}^2(u+v) =$$

$$= \frac{(\operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 v)(\operatorname{cn}^2 v + \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u) - (\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)^2}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v)^2}$$

$$= \left[\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}\right]^2.$$

Wir ziehen die Wurzel aus und bestimmen das Vorzeichen, indem wir $v = 0$ setzen.

Es folgt

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}. \tag{19}$$

Durch eine ganz analog zu führende Rechnung erhalten wir bei Benutzung der Gleichung (18)

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}. \tag{20}$$

§ 15. Elliptische Funktionen eines komplexen Arguments. Doppelte Periodizität. Wir haben im § 10 die elliptischen Funktionen nur für reelle Werte des Arguments definiert, wir wollen nun ihre Definition auch auf komplexe Werte desselben ausdehnen.

Zu dem Zweck substituieren wir in dem Integral

$$v = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{1}$$

$$x = iy = \sin\varphi = i \operatorname{tg}\psi \quad (\text{vgl. § 12, Nr. 11 I}). \tag{2}$$

Es folgt

$$\cos\varphi = \frac{1}{\cos\psi} \tag{3}$$

und

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \frac{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\psi}}{\cos\psi}.$$

Führen wir an Stelle des Moduls k den komplementären Modul

$$k' = \sqrt{1-k^2} \tag{4}$$

ein, so erhalten wir

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}{\cos\psi}. \tag{5}$$

Substituieren wir die Werte (3) und (5) in (1), so folgt

$$(6)\qquad v = iw = i\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}} = i\int_0^{y} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}}.$$

Aus der vorstehenden Gleichung folgt:

$$\mathrm{am}(w, k') = \psi \qquad \mathrm{sn}(w, k') = \sin\psi \qquad \mathrm{cn}(w, k') = \cos\psi$$

$$\mathrm{dn}(w, k') = \sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}.$$

Andererseits folgt aus (1) (vgl. § 10)

$$\mathrm{am}(v, k) = \varphi \qquad \mathrm{sn}(v, k) = \sin\varphi \qquad \mathrm{cn}(v, k) = \cos\varphi$$

$$\mathrm{dn}(v, k) = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (2), (3) und (5) ist daher

$$(7)\qquad \mathrm{sn}(iw, k) = i\frac{\mathrm{sn}(w, k')}{\mathrm{cn}(w, k')} \qquad \mathrm{cn}(iw, k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(w, k')}$$

$$\mathrm{dn}(iw, k) = \frac{\mathrm{dn}(w, k')}{\mathrm{cn}(w, k')}.$$

Damit sind die elliptischen Funktionen auch für rein imaginäre Werte des Arguments erklärt. Um sie für beliebige Werte des Arguments zu definieren, benutzen wir die Additionstheoreme (17), (20) und (21) des vorigen Paragraphen. Man überzeugt sich leicht, daß diese Theoreme auf Grund der Gleichungen (7) auch noch für rein imaginäre Werte des Arguments gelten. Es steht uns frei festzusetzen, daß sie für beliebige komplexe Werte desselben gelten sollen.

In § 10 ist gezeigt worden, daß die Funktionen

$$(8)\qquad \mathrm{sn}(v, k) \qquad \mathrm{cn}(v, k) \qquad \mathrm{dn}(v, k)$$

die Periode

$$4K = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

besitzen. Dementsprechend besitzen die Funktionen

$$(9)\qquad \mathrm{sn}(w, k') \qquad \mathrm{cn}(w, k') \qquad \mathrm{dn}(w, k')$$

die Periode

$$4K' = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}.$$

Aus den Gleichungen (7) geht nun hervor, daß die Funktionen (8) auch die Periode $4iK'$ besitzen, denn wenn das Argument w der Funktionen (9) um $4K'$ wächst, so wächst das Argument der Funktionen (8) um $4iK'$.

Die elliptischen Funktionen besitzen demnach eine doppelte Periodizität. Diese merkwürdige Eigenschaft tritt nur hervor, wenn wir auch komplexe Werte des Arguments in Betracht ziehen. Dieser Umstand deutet darauf hin, daß wir nur dann zu einer einfachen und umfassenden Theorie der elliptischen Integrale und Funktionen gelangen werden, wenn wir die Hilfsmittel heranziehen, die die Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln darbietet. Damit werden wir uns in den nächsten Abschnitten beschäftigen.

§ 16. Das Jacobische Transformationsprinzip.

Wir haben im vorausgehenden die Transformation ersten Grades des Differentials erster Gattung eingehend untersucht, daneben aber auch gewisse Transformationen zweiten Grades angewendet. Wir setzen nun, unter U und V ganze rationale Funktionen n-ten Grades der Variablen y verstehend

$$x = \frac{U}{V} \tag{1}$$

und legen uns die Frage vor: Ist es möglich die Koeffizienten dieser ganzen Funktionen so zu bestimmen, daß das elliptische Differential erster Gattung

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dx}{\sqrt{a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)}} \tag{2}$$

durch die Substitution n-ten Grades (1) wieder in ein elliptisches Differential erster Gattung transformiert wird?

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{V\frac{dU}{dy} - U\frac{dV}{dy}}{\sqrt{a_0 (U - \alpha_1 V)(U - \alpha_2 V)(U - \alpha_3 V)(U - \alpha_4 V)}}. \tag{3}$$

Der Zähler des Ausdrucks rechts ist eine ganze Funktion $2n - 2$-ten Grades von y (der Koeffizient von y^{2n-1} verschwindet). Im Nenner steht unter dem Wurzelzeichen eine ganze Funktion $4n$-ten Grades von y. Damit der Ausdruck rechts ein elliptisches

Differential erster Gattung ist, muß diese Funktion $2n-2$ Doppelfaktoren besitzen und diese müssen mit den Quadraten der Linearfaktoren des Zählers übereinstimmen.

Zwei verschiedene von den Funktionen $U-\alpha_\nu V$ können keinen gemeinschaftlichen Faktor besitzen, denn ein solcher müßte auch ein gemeinschaftlicher Faktor der Funktionen U und V sein, aber diese können wir als teilerfremd annehmen.

Ein Linearfaktor, dessen Quadrat die Funktion $U-\alpha_\nu V$ teilt, ist auch Faktor der Derivierten

$$\frac{dU}{dy}-\alpha_\nu\frac{dV}{dy}$$

und folglich auch Faktor der Funktion

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{dy}-\alpha_\nu\frac{dV}{dy} & \frac{dV}{dy} \\ U-\alpha_\nu V & V \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dU}{dy} & \frac{dV}{dy} \\ U & V \end{vmatrix}.$$

Die Bedingungen unserer Aufgabe erfordern also, daß die vier ganzen Funktionen $U-\alpha_\nu V$ zusammengenommen $2n-2$ Doppelfaktoren besitzen. Der Zähler des Ausdrucks auf der rechten Seite der Gleichung (3) ist durch das Produkt dieser Faktoren teilbar, der Quotient ist eine Konstante. Da der Quotient $\frac{U}{V}$ von $2n+1$ Konstanten abhängt, so bleiben drei von diesen Konstanten verfügbar. Dies ist von vornherein klar. Wenn nämlich die Substitution (1) den Bedingungen der Aufgabe genügt, so genügt ihr auch die allgemeinere Substitution

$$x=\frac{pU+p'V}{qU+q'V}$$

wo $pp'qq'$ beliebige Konstante bedeuten. Über diese Konstanten kann man derart verfügen, daß das transformierte Differential die Weierstraßsche Normalform besitzt oder so, daß es bis auf eine multiplikative Konstante mit der Riemannschen oder der Legendreschen Normalform übereinstimmt. Ein Beispiel dafür bietet die in § 12 durchgeführte quadratische Transformation.

Nehmen wir insbesondere an, daß schon das vorgelegte Differential die Weierstraßsche oder Legendresche Normalform besitzt, so können wir die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \gamma_2 y - \gamma_3}}$$

beziehungsweise die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{M}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\varkappa^2y^2)}}$$

ansetzen. Im ersten Fall bestehen zwischen den Invarianten g_2, g_3 und γ_2, γ_3 algebraische Gleichungen und insbesondere besteht zwischen den absoluten Invarianten (§ 5, Nr. 17)

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} \quad \text{und} \quad I = \frac{\gamma_2^3}{\gamma_2^3 - 27\gamma_3^2}$$

eine algebraische Gleichung, „die Invariantengleichung".

Im zweiten Fall besteht zwischen den Moduln k und $\varkappa$ die „Modulargleichung", zwischen dem Modul k und dem Multiplikator M die „Multiplikatorgleichung".

Auf die Theorie dieser Gleichungen werden wir später von einem ganz anderen Ausgangspunkt aus zurückkommen. Vorerst wollen wir nur die Transformationen zweiten Grades untersuchen, die die Weierstraßsche kanonische Form wieder in eine Weierstraßsche kanonische Form transformieren.

§ 17. Die Transformationen zweiten Grades. Wenn wir von der Weierstraßschen kanonischen Form ausgehen, so erhält die Gleichung (3) des vorigen Paragraphen die Form

$$(1)\quad \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} = \frac{V\frac{dU}{dy} - U\frac{dV}{dy}}{2\sqrt{V(U-e_1V)(U-e_2V)(U-e_3V)}}\,dy.$$

Unter der Voraussetzung, daß die beiden ganzen Funktionen U und V von nicht höherem als dem zweiten Grade sind, lauten die Bedingungen dafür, daß die rechte Seite der vorstehenden Gleichung ein Differential erster Gattung ist: von den vier Funktionen zweiten Grades

$$(2)\quad V,\quad U-e_1V,\quad U-e_2V,\quad U-e_3V,$$

müssen zwei Quadrate sein.

Damit dieses Differential ebenfalls die Weierstraßsche kanonische Form besitzt, ist erstens erforderlich, das eine der vier Funktionen (2) auf den ersten Grad sinkt, und zweitens, daß

$$(3)\qquad \lim_{y=\infty} \frac{y^3\left(V\frac{dU}{dy} - U\frac{dV}{dy}\right)^2}{V(U-e_1V)(U-e_2V)(U-e_3V)} = 1$$

ist.

Wir können die Zahl der in Betracht zu ziehenden Möglichkeiten durch die folgende Überlegung erheblich einschränken:

Transformieren wir die Weierstraßsche Normalform zuerst durch eine der vier in § 7 No. 9 angegebenen Substitutionen in sich und wenden wir dann eine Transformation zweiten Grades an, die sie in eine andere Weierstraßsche Normalform transformiert, so erhalten wir durch die Zusammensetzung der beiden Transformationen eine zweite Transformation zweiten Grades, die dasselbe leistet wie die erste. Diese beiden Transformationen betrachten wir als nicht wesentlich verschieden.

Bei Anwendung der vier Transformationen ersten Grades werden die drei Faktoren

$$x - e_1, \qquad x - e_2, \qquad x - e_3$$

untereinander permutiert und dementsprechend werden auch die vier Funktionen (2) permutiert. Wir können und wollen die Permutation so wählen, daß V diejenige der Funktionen (2) ist, die eine lineare Funktion des Variabeln y ist. Unter dieser Annahme entspricht einem ∞ großen Wert der Variabeln y ein unendlich großer Wert der Variabeln x (vgl. die in § 13, Nr. 8 getroffene Bestimmung).

Um die noch verbleibenden Möglichkeiten auf einmal erledigen zu können, bezeichnen wir mit λ, μ, ν und α, β, γ zwei beliebige Permutationen der Zahlen 1, 2, 3 und nehmen an, die Funktionen

$$U - e_\lambda V \text{ und } U - e_\mu V$$

seien Quadrate und es sei

$$(4)\qquad V = a(y - \varepsilon_\gamma), \qquad U - e_\nu V = b(y - \varepsilon_\alpha)(y - \varepsilon_\beta).$$

Hier bedeuten a und b Konstante, die sofort bestimmt werden sollen. Der Koeffizient von y^7 in dem Ausdruck

$$V(U - e_1 V)(U - e_2 V)(U - e_3 V)$$

ist ab^3.

Der Koeffizient von y^2 in dem Ausdruck

$$V\frac{dU}{dy} - U\frac{dV}{dy}$$

ist ab. Aus (3) folgt daher

$$a = b.$$

Da es nichts ausmacht, wenn wir U und V mit derselben Konstanten multiplizieren, so können wir

$$a = b = 1 \tag{5}$$

setzen.

Aus (4) folgt mit Rücksicht auf (5)

$$\begin{cases} U - e_\lambda V = y^2 - [\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + (e_\lambda - e_\nu)]y + [\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + (e_\lambda - e_\nu)\varepsilon_\gamma], \\ U - e_\mu V = y^2 - [\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + (e_\mu - e_\nu)]y + [\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + (e_\mu - e_\nu)\varepsilon_\gamma]. \end{cases} \tag{6}$$

Damit die beiden vorstehenden Funktionen zweiten Grades Quadrate sind, müssen die Größen

$$e_\lambda - e_\nu = \varrho_1 \text{ und } e_\mu - e_\nu = \varrho_2 \tag{7}$$

Wurzeln der Gleichung

$$(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varrho)^2 = 4(\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + \varrho \varepsilon_\gamma)$$

sein. Mit Rücksicht auf die Relation (§ 7, No. 1)

$$\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma = 0$$

können wir diese Gleichung in der Form schreiben

$$\varrho^2 - 6\varepsilon_\gamma \varrho + (\varepsilon_\gamma^2 - 4\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta) = 0. \tag{8}$$

Die Diskriminante dieser Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta = (\varrho_1 - \varrho_2)^2 = (e_\lambda - e_\mu)^2 &= 16(2\varepsilon_\gamma^2 + \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta) \\ &= 16(\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha)(\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\beta) \end{aligned} \tag{9}$$

verschwindet nicht.

Aus (7) folgt mit Rücksicht auf die Gleichung

$$e_\lambda + e_\mu + e_\nu = 0$$

$$3e_\nu = -(\varrho_1 + \varrho_2), \quad 3e_\lambda = 2\varrho_1 - \varrho_2, \quad 3e_\mu = 2\varrho_2 - \varrho_1. \tag{10}$$

Bei der weiteren Untersuchung setzen wir voraus, die drei Größen ε_1, ε_2, ε_3 seien reell und fordern, daß auch die Größen e_1, e_2, e_3 reell sind. Die Bezeichnung wählen wir so, daß

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \text{ und } e_1 > e_2 > e_3$$

ist (vgl. § 7, No. 3).

Im Einklang mit der früher eingeführten Bezeichnungsweise (§ 11, Nr. 2) setzen wir

$$(11)\qquad \begin{cases} k^2 = \dfrac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} & k'^2 = \dfrac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \\ \varkappa^2 = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} & \varkappa'^2 = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}. \end{cases}$$

Damit die Größe Δ (9) positiv ist, darf ε_γ nicht zwischen ε_α und ε_β liegen, es muß also $\gamma = 1$ oder $= 3$ sein.

Wir nehmen zunächst an, es sei

$$(12)\qquad \gamma = 1, \qquad \beta = 2, \qquad \alpha = 3.$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung (8) haben, weil

$$\varepsilon_\gamma^{\,2} - 4\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta = (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^2$$

positiv ist, dasselbe Vorzeichen und zwar das positive, da $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_1$ positiv ist. Bezeichnen wir mit ϱ_1 die größere der beiden Wurzeln, so folgt aus (7)

$$e_\lambda > e_\mu > e_\nu,$$

wir müssen daher

$$(13)\qquad \lambda = 1, \quad \mu = 2, \quad \nu = 3$$

setzen.

Aus den Gleichungen (8), (9) und (11) folgt

$$(14)\qquad \begin{cases} \varrho_1 + \varrho_2 = 6\varepsilon_1 = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)(1 + \varkappa'^2), \\ \varrho_1 - \varrho_2 = 4(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\varkappa', \\ \qquad \varrho_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)(1 + \varkappa')^2, \\ \qquad \varrho_2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)(1 - \varkappa')^2. \end{cases}$$

Folglich ist wegen (7) und (11)

$$k^2 = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \left(\frac{1 - \varkappa'}{1 + \varkappa'}\right)^2 \quad \text{also}$$

$$(15)\qquad k = \frac{1 - \varkappa'}{1 + \varkappa'}, \quad \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{e_1 - e_3} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varrho_1} = \frac{1}{(1 + \varkappa')^2} = \left(\frac{1 + k}{2}\right)^2.$$

Hieraus folgt die Modulargleichung

$$(16)\qquad \varkappa^2 = \frac{4k}{(1 + k)^2}.$$

Unsere Substitution lautet in diesem Fall ((4) u. (5)):

$$(17)\qquad x - e_3 = \frac{(y - \varepsilon_2)(y - \varepsilon_3)}{y - \varepsilon_1}.$$

Um y als Funktion der Variabeln x zu bestimmen, benutzen wir die Gleichung

$$(18)\qquad \frac{x-e_2}{x-e_1}=\left(\frac{y-\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{4}e_3}{y-\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{4}e_3}\right)^2,$$

die sich durch eine einfache Rechnung aus den Gleichungen (4), (5), (7) und (8) ergibt.

Man bezeichnet die Substitution (17) als „Landensche“ Substitution. Nehmen wir nunmehr an

$$(19)\qquad \alpha=1,\quad \beta=2,\quad \gamma=3.$$

Die Wurzeln der Gleichung (8) haben auch in diesem Fall dasselbe Vorzeichen, aber sie sind negativ, weil $\varepsilon_\gamma=\varepsilon_3$ negativ ist. Wählen wir die Bezeichnung wieder so, daß die Wurzel ϱ_1 den größeren absoluten Betrag besitzt, so ist die Differenz $\varrho_1-\varrho_2$ negativ und wir müssen mit Rücksicht auf (7)

$$(20)\qquad \nu=1,\quad \mu=2,\quad \lambda=3$$

setzen. Aus (8), (9) und (11) folgt in diesem Fall

$$(21)\qquad \begin{cases} \varrho_1+\varrho_2=6\varepsilon_3=-2(\varepsilon_1-\varepsilon_3)(1+\varkappa^2),\\ \varrho_1-\varrho_2=-4(\varepsilon_1-\varepsilon_3)\varkappa,\\ \quad\varrho_1=-(\varepsilon_1-\varepsilon_3)(1+\varkappa)^2,\\ \quad\varrho_2=-(\varepsilon_1-\varepsilon_3)(1-\varkappa)^2. \end{cases}$$

Aus (7) und (11) folgt

$$(22)\qquad k'=\sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}=\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}.$$

Hieraus ergibt sich die Modulargleichung

$$(23)\qquad k^2=\frac{4\varkappa}{(1+\varkappa)^2}.$$

Die Gleichung (23) geht aus (15) hervor, wenn man k und $\varkappa$ vertauscht.

Unsere Substitution lautet nunmehr ((4) u. (5)):

$$(24)\qquad x-e_1=\frac{(y-\varepsilon_1)(y-\varepsilon_2)}{y-\varepsilon_3}.$$

Zur Bestimmung von y dient die Gleichung

$$(25)\qquad \frac{x-e_2}{x-e_3}=\left(\frac{y-\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{4}e_1}{y-\frac{1}{2}e_3+\frac{1}{4}e_1}\right)^2.$$

Man bezeichnet diese Substitution als Gaußische Substitution.

§ 18. Anwendung der Landenschen Substitution auf die Legendresche kanonische Form. Die Landensche Substitution nimmt eine besonders einfache Gestalt an, wenn wir von der Weierstraßschen kanonischen Form zu der Legendreschen übergehen und die Amplitude einführen (§ 13 Nr. 3).

Wir setzen, die im vorigen Paragraphen eingeführten Bezeichnungen beibehaltend

$$\frac{x - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{1}{\sin^2\varphi} \tag{1}$$

und

$$\frac{y - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = \frac{1}{\sin^2\psi}, \tag{2}$$

woraus

$$\frac{x - e_1}{e_1 - e_3} = \operatorname{ctg}^2\varphi, \quad \frac{x - e_2}{e_1 - e_3} = \frac{1 - k^2 \sin\varphi}{\sin^2\varphi} \tag{3}$$

und

$$\frac{y - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = \operatorname{ctg}^2\psi, \quad \frac{y - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = \frac{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi}{\sin^2\psi} \tag{4}$$

folgt. Wir erhalten

$$\frac{dx}{2\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}} = -\frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

und dementsprechend

$$\frac{dy}{2\sqrt{(y - \varepsilon_1)(y - \varepsilon_2)(y - \varepsilon_3)}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi}}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (15) des vorigen Paragraphen folgt

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \frac{2}{1 + k} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi}} = (1 + \varkappa') \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi}}. \tag{5}$$

Zwischen k, $\varkappa$ und $\varkappa'$ bestehen die Beziehungen

$$k = \frac{1 - \varkappa'}{1 + \varkappa'}, \quad \varkappa' = \frac{1 - k}{1 + k}, \quad \varkappa^2 = \frac{4k}{(1 + k)^2}. \tag{6}$$

Die Substitution (17) des vorigen Paragraphen erhält, wenn wir die Werte (1), (2) und (4) einführen, die Gestalt

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{(1 + \varkappa')^2} \frac{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi}{\sin^2\psi \cos^2\psi}.$$

Nach einer leichten Umformung erhalten wir

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 - (1 + \varkappa') \sin^2\psi}{(1 + \varkappa') \sin\psi \cos\psi}$$

und hieraus

$$(7)\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{(1+\varkappa')\operatorname{tg}\psi}{1-\varkappa'\operatorname{tg}^2\psi} = \frac{(1+\varkappa')\sin 2\psi}{(1-\varkappa')+(1+\varkappa')\cos 2\psi} = \frac{\sin 2\psi}{k+\cos 2\psi}.$$

Wir geben dieser Gleichung eine für die numerische Rechnung bequemere Form. Es ist

$$\operatorname{tg}(\varphi-\psi) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi}{1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi} = \frac{(1+\varkappa')\operatorname{tg}\psi - (1-\varkappa'\operatorname{tg}^2\psi)\operatorname{tg}\psi}{1-\varkappa'\operatorname{tg}^2\psi + (1+\varkappa')\operatorname{tg}^2\psi},$$

folglich

$$(8)\qquad \operatorname{tg}(\varphi-\psi) = \varkappa'\operatorname{tg}\psi.$$

Diese Gleichung dient zur Berechnung von φ, wenn ψ gegeben ist.

Aus (7) folgt ferner

$$(9)\qquad \sin(2\psi-\varphi) = k\sin\varphi.$$

Diese Gleichung dient zur Berechnung von ψ, wenn φ gegeben ist.

Dem Wert $\varphi = 0$ entspricht der Wert $\psi = 0$ (7). Bei Benutzung der abkürzenden Bezeichnung

$$F(k,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

erhalten wir daher aus (5) die Gleichung

$$(10)\qquad F(k,\varphi) = \frac{2}{1+k}F(\varkappa,\psi) = (1+\varkappa')F(\varkappa,\psi).$$

§ 19. Berechnung des Legendreschen Normalintegrals erster Gattung. Wir benutzen die Landensche Substitution, um das Legendresche Normalintegral erster Gattung $F(k,\varphi)$ zu berechnen. Dabei halten wir an der Voraussetzung fest, daß der Modul k reell, positiv und < 1 und daß die Amplitude φ reell und positiv ist.

Bei Anwendung der Landenschen Substitution wird der Modul des Integrals erster Gattung vergrößert, die Amplitude wird verkleinert, wie aus den Gleichungen (6) und (9) des vorigen Paragraphen hervorgeht. Durch wiederholte Anwendung der Landenschen Substitution kann daher das Integral $F(k,\varphi)$ — wie sofort des genaueren nachgewiesen werden wird — auf ein Integral erster Gattung zurückgeführt werden,

dessen Modul innerhalb der verlangten Genauigkeitsgrenzen $= 1$ gesetzt werden kann. Dieses Integral läßt sich ohne weiteres berechnen: es ist

(1) $$F(1,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Bei Anwendung der inversen Substitution wird der Modul verkleinert, die Amplitude vergrößert. Durch wiederholte Anwendung dieser Substitution kann daher das Integral $F(k,\varphi)$ auf ein Integral zurückgeführt werden, dessen Modul $= 0$ gesetzt werden kann und es ist

(2) $$F(0,\varphi) = \varphi.$$

Wir beschäftigen uns zunächst mit der letzteren Transformation.

In den Gleichungen (6) und (8) des vorigen Paragraphen setzen wir an Stelle der Buchstaben

$$k \quad k' \quad \varkappa \quad \varkappa' \quad \varphi \quad \psi$$

beziehungsweise

$$k_{\nu+1} \quad k'_{\nu+1} \quad k_\nu \quad k'_\nu \quad \varphi_{\nu+1} \quad \varphi_\nu.$$

Wir berechnen nun von dem Modul $k_0 = k$ und der Amplitude $\varphi_0 = \varphi$ ausgehend eine unbegrenzte Reihe von Moduln und Amplituden mittelst der Rekursionsformeln:

(3) $$k_{\nu+1} = \frac{1-k_\nu'}{1+k_\nu'} = \frac{k_\nu^2}{(1+k_\nu')^2}, \qquad k_\nu' = \sqrt{1-k_\nu^2}, \quad \nu = 0,1,2,\cdots$$

(4) $$\operatorname{tg}(\varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu) = k_\nu' \operatorname{tg}\varphi_\nu.$$

Wegen

$$k_{\nu+1} < k_\nu^2$$

konvergieren die Glieder der Reihe

$$k \quad k_1 \quad k_2 \quad \cdots$$

gegen Null.

Aus (4) folgt

$$2\varphi_\nu > \varphi_{\nu+1} > \varphi_\nu.$$

Daher konvergiert der Quotient $\frac{\varphi_\nu}{2^\nu}$ bei wachsendem ν gegen einen endlichen Grenzwert Φ_0.

Aus der Gleichung (10) des vorigen Paragraphen folgt

$$F(k_\nu, \varphi_\nu) = \frac{1+k_{\nu+1}}{2} F(k_{\nu+1}, \varphi_{\nu+1}).$$

Da nun

$$\lim_{\nu=\infty} k_\nu = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{\varphi_\nu}{2^\nu} = \Phi_0$$

ist, so folgt (2)

(5) $$F(k,\varphi) = (1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\cdots\Phi_0.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist (4) $\varphi_1 = \pi$ und allgemein $\varphi_\nu = 2^\nu \cdot \frac{\pi}{2}$.

Folglich ist

(6) $$K = F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = (1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\cdots\frac{\pi}{2}.$$

Substituieren wir diesen Wert in (5), so folgt

(7) $$F(k,\varphi) = \frac{2K}{\pi}\cdot\Phi_0.$$

Die vorstehenden Formeln erhalten eine sehr elegante Form, wenn wir an Stelle der Größen k', k_ν' die Quotienten

(8) $$k' = \frac{b}{a}, \quad k_\nu' = \frac{b_\nu}{a_\nu}$$

einführen. Aus (3) folgt

$$k'_{\nu+1} = \frac{2\sqrt{k_\nu'}}{1+k_\nu'} \quad \text{also} \quad \frac{b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}} = \frac{\sqrt{a_\nu b_\nu}}{\frac{1}{2}(a_\nu+b_\nu)}.$$

Wir genügen dieser Gleichung, indem wir

(9) $$a_{\nu+1} = \tfrac{1}{2}(a_\nu+b_\nu), \quad b_{\nu+1} = \sqrt{a_\nu b_\nu}$$

setzen. Die Größe a kann willkürlich gewählt werden.

Die Glieder der Reihe

$$a \quad a_1 \quad a_2 \cdots$$

nehmen beständig ab, die der Reihe

$$b \quad b_1 \quad b_2 \cdots$$

nehmen beständig zu.

Weil

$$\lim k_\nu = 0 \quad \text{also} \quad \lim k_\nu' = \frac{b_\nu}{a_\nu} = 1$$

ist, konvergieren die Größen a_ν und b_ν gegen denselben Grenzwert $M(a,b)$. Man bezeichnet denselben nach Gauß Vorgang als arithmetisch-geometrisches Mittel.

Aus (3) folgt mit Rücksicht auf (8) und (9)

$$1 + k_{\nu+1} = \frac{2a_\nu}{a_\nu+b_\nu} = \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}.$$

Setzen wir diese Werte in (6) ein, so folgt

$$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{M(a,b)} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{M(1,k')} \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Indem wir die Größen k und k' vertauschen, erhalten wir

$$K' = F\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{M(1,k)} \cdot \frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

Ein Beispiel mag zeigen, wie schnell das auseinandergesetzte Verfahren zum Ziel führt.

Es sei

$$k = \frac{24}{25}, \quad k' = \frac{7}{25}.$$

Wir setzen

$$a = 25, \quad b = 7$$

und erhalten auf fünf Dezimalen genau

$$\begin{aligned} a_1 &= 16 & b_1 &= 13{,}22\,876 \\ a_2 &= 14{,}61\,438 & b_2 &= 14{,}54\,854 \\ a_3 &= 14{,}58\,146 & b_3 &= 14{,}58\,142 \\ a_4 &= b_4 = M(a,b) &&= 14{,}58\,144. \end{aligned}$$

Es ist somit

$$K = F\left(\frac{24}{25}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{25}{14{,}58144} \cdot \frac{\pi}{2} = 2{,}69\,314.$$

Um auch K' zu berechnen, setzen wir

$$a = 25 \qquad b = 24$$

und erhalten

$$\begin{aligned} a_1 &= 24{,}5 & b_1 &= 24{,}49\,491 \\ a_2 &= 24{,}49\,7455 & b_2 &= 24{,}49\,7443 \\ a_3 &= b_3 = M(a,b) &&= 24{,}49\,745 \end{aligned}$$

$$K' = F\left(\frac{7}{25}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{25}{24{,}49745} \frac{\pi}{2} = 1{,}60\,338.$$

Um das Integral $F(k, \varphi)$ durch sukzessive Vergrößerung des Moduls zu berechnen, ersetzen wir in den Gleichungen (6) und (9) des vorigen Paragraphen die Buchstaben

$$k \quad k' \quad \varkappa \quad \varkappa' \quad \varphi \quad \psi$$

beziehungsweise durch

$$k_{-\nu} \; k'_{-\nu} \; k_{-\nu-1} \; k'_{-\nu-1} \; \varphi_{-\nu} \; \varphi_{-\nu-1}$$

und berechnen eine unbegrenzte Reihe von Moduln und Amplituden mittelst der Rekursionsformeln

$$(12)\qquad k'_{-\nu-1} = \frac{1-k_{-\nu}}{1+k_{-\nu}}\quad k'_{-\nu} = \sqrt{1-k_{-\nu}^2}\qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

$$(13)\qquad \sin(2\varphi_{-\nu-1} - \varphi_{-\nu}) = k_{-\nu}\sin\varphi_{-\nu}.$$

Aus (12) ergibt sich, daß bei wachsendem ν $k'_{-\nu}$ gegen Null, also $k_{-\nu}$ gegen 1 konvergiert. Aus (13) folgt, daß $\varphi_{-\nu}$ bei wachsendem Index abnimmt aber positiv bleibt. Folglich konvergiert $\varphi_{-\nu}$ gegen einen endlichen positiven Grenzwert Φ_1.

Aus der Schlußgleichung des vorigen Paragraphen folgt

$$(14)\qquad F(k_{-\nu}, \varphi_{-\nu}) = (1 + k'_{-\nu-1})F(k_{-\nu-1}, \varphi_{-\nu-1})$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf (1)

$$(15)\ F(k,\varphi) = (1 + k'_{-1})(1 + k'_{-2})(1 + k'_{-3}) \cdots \lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi_1}{2}\right).$$

Wir machen von der eben besprochenen Transformation Gebrauch, um einen Näherungswert für das Integral $F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ zu bestimmen, unter der Voraussetzung, daß k nur wenig von 1 verschieden ist.

Wir setzen, unter γ eine sehr kleine Größe verstehend

$$(16)\qquad k = \cos\gamma$$

und erhalten aus (12)

$$(17)\qquad k'_{-1} = \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}.$$

Aus (13) folgt für $\nu = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(2\varphi_{-1} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\gamma$$

also

$$(18)\qquad \varphi_{-1} = \frac{\pi - \gamma}{2}.$$

Aus (14) folgt mit Rücksicht auf (17) und (18)

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}F(k_{-1}, \varphi_{-1}) = \frac{1}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}\int_0^{\frac{\pi-\gamma}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \operatorname{tg}^4\frac{\gamma}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Weil im Intergrationsintervall

$$\operatorname{tg}^4 \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \leqq \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}$$

also sehr klein ist, können wir die Wurzel

$$\frac{1}{\cos\varphi \sqrt{1 + \operatorname{tg}^4 \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

in eine Binomialreihe entwickeln. Die Reihensumme liegt zwischen

$$\frac{1}{\cos\varphi} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\cos\varphi} - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{\gamma}{2} \frac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}.$$

Das Integral

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi - \gamma}{2}} \operatorname{tg}^4 \frac{\gamma}{2} \frac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi} \, d\varphi$$

konvergiert mit γ gegen Null. Das Integral

$$Q = \frac{1}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi - \gamma}{2}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{4}\right)$$

wächst, wenn γ gegen Null konvergiert, über alle Grenzen, aber die Differenz

$$Q - \log \frac{4}{k'} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \lg \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{4} + \log \frac{\sin\gamma}{4}$$

konvergiert gegen Null. Es ist daher

$$\lim_{k=1} \left[F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - \log \frac{4}{k'} \right] = 0. \tag{19}$$

Zweiter Abschnitt.

Funktionentheoretische Untersuchung der rationalen Funktionen der Größen x und $\sqrt{f(x)}$.

§ 20. Die Riemannsche Fläche. Bei unseren Untersuchungen haben wir es fortwährend mit der irrationalen Größe

$$s = \sqrt{f(x)} = \sqrt{a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)}$$

zu tun. Solange die Variable x auf reelle Werte beschränkt bleibt, hat es keine Schwierigkeit, das Vorzeichen der Größe s zu bestimmen. Wenn die vier Wurzeln α_ν komplexe Größen sind, so können wir für einen speziellen Wert x das Vorzeichen der Größe s nach Belieben wählen; es ist dann für alle Werte von x durch die Festsetzung bestimmt, daß die Größe s sich mit x nach der Stetigkeit ändert. Sind die Wurzeln α_ν sämtlich oder wenigstens teilweise reell, so kann für jedes Intervall, das durch zwei reelle Wurzeln begrenzt ist, das Vorzeichen der Größe s beliebig gewählt werden. Wesentlich anders verhält sich die Sache, wenn wir auch komplexe Werte der Variabeln x in Betracht ziehen. Um die Sachlage klar zu stellen, machen wir von dem Hilfsmittel der geometrischen Repräsentation Gebrauch. Wir setzen, Reelles und Imaginäres trennend

$$x = X + iY$$

und repräsentieren in üblicher Weise die komplexe Variable x durch den Punkt einer festen Ebene, dessen kartesische Koordinaten die Werte X, Y besitzen*). Den Punkt bezeichnen wir

*) Die Achsen nehmen wir in üblicher Weise so orientiert an, daß man im Sinn der wachsenden Abszissen fortschreitend die Richtung der wachsenden Ordinaten zur Linken hat.

durch denselben Buchstaben wie die komplexe Variable, deren Wert er repräsentiert.

Wir wählen nun unter den beiden Werten der Größe s, die einem bestimmten Wert $x = b$ entsprechen, einen aus — er möge mit β bezeichnet werden — und lassen den Punkt x eine vom Punkt b ausgehende Kurve L durchlaufen, die sich nicht überkreuzt und durch keinen der vier Punkte α_ν geht. Der Wert der Größe s ist für jeden Punkt der Kurve L eindeutig durch die beiden Bedingungen bestimmt, daß sich die Größe s mit x nach der Stetigkeit ändert und daß sie im Anfangspunkt den Wert β annimmt.

Es ist also insbesondere der Wert γ, den s im Endpunkt c der Kurve L annimmt, eindeutig bestimmt. Man bezeichnet dieses Verfahren den Wert der Größe s im Punkt c zu bestimmen, als analytische Fortsetzung der Funktion s längs der Kurve L*). Das Verfahren ist offenbar eindeutig umkehrbar: Wenn man vom Punkt c ausgehend den Anfangswert γ längs der Kurve L analytisch fortsetzt, so erhält man im Punkt b den Endwert β. Nehmen wir an, es seien zwei die Punkte b und c verbindende Kurven L und L' gegeben. Wenn die analytische Fortsetzung des Funktionswertes β längs des Weges L' zu demselben Endwert führt wie die längs des Weges L, so wird die analytische Fortsetzung des Funktionswertes β längs der geschlossenen Kurve, die sich aus den Wegen L und L' zusammensetzt, zum Anfangswert zurückführen. Führt dagegen die analytische Fortsetzung längs des Weges L im Punkt c zum Endwert γ, die Fortsetzung längs des Weges L' zum Endwert $-\gamma$, so führt die Fortsetzung längs des Weges LL' nicht zum Anfangswert β zurück, sondern zum Wert $-\beta$.

Wir müssen nun zunächst feststellen, unter welchen Bedingungen die analytische Fortsetzung der Funktion s längs einer in sich zurücklaufenden Kurve C zum Anfangswert zurückführt. Zu dem Zweck betrachten wir die vier Wurzelfunktionen $\sqrt{x - \alpha_\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3, 4)$. Wir setzen

$$x - \alpha_\nu = \varrho_\nu e^{i\varphi_\nu}.$$

*) Vgl. F. Th., § 47.

Die absoluten Beträge

$$\varrho_\nu = |x - \alpha_\nu|$$

sind eindeutig bestimmt. Die Arkuse

$$\varphi_\nu = \operatorname{arc}(x - \alpha_\nu)$$

sind nur bis auf ein Multiplum von 2π bestimmt; wenn aber der Wert einer jeden dieser vier Größen für einen Punkt b der Kurve C fixiert ist, so können sie mittelst des Prinzips der analytischen Fortsetzung für die ganze Kurve C eindeutig definiert werden. Wenn die Kurve C den Punkt α_ν nicht einschließt, so ist der Endwert der Funktion φ_ν gleich dem Anfangswert (s. Fig. 1); wenn dagegen der Punkt α_ν innerhalb der Kurve C liegt, so ist der Endwert der Funktion φ_ν um 2π vom Anfangswert verschieden (s. Fig. 2). Folglich ist im ersten Fall der Endwert der Funktion

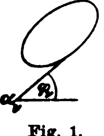


Fig. 1.



Fig. 2.

$$\sqrt{x - \alpha_\nu} = \sqrt{\varrho_\nu}\, e^{\frac{1}{2} i \varphi_\nu}$$

gleich dem Anfangswert, im zweiten Fall dagegen ist er

$$\sqrt{\varrho_\nu}\, e^{\frac{1}{2} i(\varphi_\nu \pm 2\pi)} = -\sqrt{\varrho_\nu}\, e^{\frac{1}{2} i \varphi_\nu};$$

er besitzt also in diesem Fall das entgegengesetzte Vorzeichen wie der Anfangswert.

Wir schließen hieraus:

Die analytische Fortsetzung der Funktion

$$s = \sqrt{a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)}$$

längs der geschlossenen Kurve C führt zum Anfangswert zurück, wenn diese Kurve keinen von den Punkten α_ν oder zwei derselben oder alle vier einschließt; dagegen ist der Endwert dem Anfangswert entgegengesetzt gleich, wenn die Kurve C einen oder drei der Punkte α_ν einschließt.

Wir verbinden nun die Punkte α_1 und α_2 durch eine Kurve D, die Punkte α_3 und α_4 durch eine Kurve D' (s. Fig. 3).

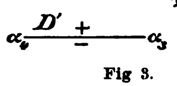


Fig 3.

Die mit den Einschnitten D, D' versehene Ebene bezeichnen wir mit E'. Wir unterscheiden die beiden Ränder der Linien

D und D' als + Rand und — Rand der Art, daß ein positiver Umlauf um den Punkt α_2 vom + Rand auf den — Rand von D, und ein positiver Umlauf um den Punkt α_4 vom + Rand auf den — Rand von D' führt*). Eine in sich zurücklaufende Kurve, die innerhalb der Fläche E' verläuft, also keine der beiden Linien D, D' überschreitet, kann nur eine gerade Anzahl der Punkte α_ν einschließen. Daraus folgt:

Ziehen wir nur Wege in Betracht, die innerhalb der Fläche E' verlaufen, so führt die analytische Fortsetzung der Funktion s längs zweier Wege, die dieselben Punkte b und c verbinden, zu demselben Endwert.

Die Funktion s ist demnach für die Fläche E' eindeutig definiert, so bald ihr Wert für einen bestimmten Punkt b derselben fixiert ist. Je nachdem wir den einen oder den andern der beiden Werte, die dem Punkt b zugeordnet sind, als Anfangswert wählen, erhalten wir zwei verschiedene Funktionen s_1 und s_2.

Die Werte, die die Funktionen s_1 und s_2 zu beiden Seiten der Linien D und D' annehmen, besitzen entgegengesetzte Vorzeichen, denn man kann sie durch eine in sich zurücklaufende Kurve verbinden, die einen der beiden Endpunkte der betreffenden Linie einschließt (s. Fig. 4).

Fig 4.

Die Werte, die die Funktion s_ν in gegenüberliegenden Punkten auf den Rändern der Linien D und D' annimmt, bezeichnen wir kurz mit $\overset{+}{s}_\nu$, beziehungsweise $\overset{-}{s}_\nu$. Zwischen diesen Werten bestehen die Beziehungen

$$\overset{+}{s}_1 = \overset{-}{s}_2 \text{ und } \overset{-}{s}_1 = \overset{+}{s}_2 .$$

Wir legen nun zwei Exemplare der Ebene E' aufeinander und ordnen den Punkten des oberen Blattes E'_1 die Werte der

*) Wenn ein Punkt eine geschlossene Kurve in dem Sinn durchläuft, daß die eingeschlossene Fläche zur Linken liegt, so sagt man, der Punkt durchlaufe die Kurve im positiven Sinn. Dementsprechend sagt man, ein Punkt führe einen positiven Umlauf um einen Punkt b aus, wenn er eine den Punkt b einschließende Kurve im positiven Sinn durchläuft.

Funktion s_1, den Punkten des unteren Blattes E'_2 die Werte der Funktion s_2 zu. Sodann schneiden wir jedes Blatt längs der Kurven D und D' auf und heften den + Rand der im Blatte E'_1 liegenden Kurve D_1 an den — Rand der in E'_2 liegenden Kurve D_2 und den — Rand der Kurve D_1 an den + Rand von D_2. Dementsprechend wird der + Rand der Kurve D'_1 an den — Rand von D'_2 und der — Rand von D'_1 an den + Rand von D'_2 geheftet. Auf diese Weise entsteht eine unbegrenzte zweiblättrige Fläche T; man bezeichnet sie als Riemannsche Fläche. Die Linien D und D', längs deren die beiden Blätter der Fläche T aneinander geheftet sind, bezeichnet man als „Übergangslinien" oder auch als „Doppellinien", die Punkte α_ν als „Verzweigungspunkte".

Die beiden Blätter der Riemannschen Fläche haben nur die Verzweigungspunkte α_ν gemein; längs der Doppellinien durchsetzen sie sich gegenseitig, ohne daß sie, von den Punkten α_ν abgesehen, Punkte gemein haben. Durch ein materielles Modell lassen sich diese Zusammenhangsverhältnisse nicht vollkommen versinnlichen.

Die Werte der Funktion s sind den Punkten der Riemannschen Fläche eindeutig zugeordnet und, sofern die Variable x auf endliche Werte beschränkt bleibt, ist die Funktion s überall stetig.

Damit ein Punkt der Fläche T eindeutig bestimmt ist, muß außer dem Wert der Variabeln x auch noch der Wert der zugehörigen Variabeln s gegeben sein. Einen Punkt, dem die Werte $x = c$, $s = \gamma$ zugeordnet sind, bezeichnen wir kurz als Punkt (c, γ).

Anstatt die Werte der komplexen Variabeln x durch die Punkte einer Ebene geometrisch zu repräsentieren, können wir sie auch den Punkten einer Kugel zuordnen.*) Zu dem Zweck beschreiben wir um den Nullpunkt der x-Ebene mit dem Radius 1 eine Kugel und projizieren die x-Ebene von dem einen Endpunkt des Durchmessers aus, der auf ihr senkrecht steht, stereographisch auf die Kugel. Jedem Punkt der Kugel wird derselbe Wert der komplexen Variabeln x zugeordnet,

*) Vgl. F. Th. § 15.

wie dem entsprechenden Punkt der x-Ebene. Dem unendlich fernen Gebiet der x-Ebene entspricht auf der Kugel ein Punkt, nämlich der Pol, von dem aus projiziert wird. Wenn man zur geometrischen Repräsentation die Kugel benutzt, so gewinnt demnach die in der Funktionentheorie übliche Bezeichnung „unendlich ferner Punkt“ eine durchaus anschauliche Bedeutung.

Der zweiblättrigen Riemannschen Fläche T entspricht eine zweiblättrige Kugelfläche, die Riemannsche Kugel.

Auf dieser Kugel können wir, ohne daß sich irgend etwas wesentliches ändert, einen der Verzweigungspunkte in den Pol, der dem unendlich fernen Punkt der x-Ebene entspricht, rücken lassen. Der Grenzfall, daß einer der Verzweigungswerte unendlich groß wird, bietet also keine wesentliche Besonderheit.

§ 21. Die der Weierstraßschen Normalform entsprechende Riemannsche Fläche. Bei den folgenden Betrachtungen gehen wir von der Weierstraßschen Normalform (§ 7)

(1) $$s^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$$

aus. In diesem Falle ist einer der Verzweigungswerte unendlich groß.

Mit der Riemannschen Fläche, die der Gleichung (1) entspricht, haben wir es im folgenden fortwährend zu tun, wir wollen deshalb von einer ganz bestimmten Vorstellung ausgehen.

Die Übergangslinien D und D' nehmen wir geradlinig an. Die Linie D' verbinde die beiden Punkte e_2 und e_3; die Linie D gehe vom Punkt e_1 aus ins Unendliche, ihre Richtung falle mit der Richtung des Vektors zusammen, der vom Punkt e_3 aus zum Punkt e_1 führt (Fig. 5). Bezüglich der Bezeichnung der Ränder der Übergangslinien wollen wir festsetzen: ein positiver Umlauf um den Punkt e_1 und ein positiver Umlauf um den Punkt e_3 führe vom + Rand auf den − Rand der betreffenden Übergangslinie.

Fig. 4.

Wenn die Verzweigungspunkte auf einer Geraden liegen,

so bezeichnen wir mit e_2 den mittleren derselben. Insbesondere setzen wir, wenn sie reell sind, wieder

$$e_1 > e_2 > e_3$$

voraus. Die Übergangslinien fallen in diesem Falle in die Achse der reellen Zahlen, ihre positiven Ränder liegen auf der Seite der wachsenden Ordinaten.

Um die Funktionszweige s_1 und s_2 eindeutig zu definieren, setzen wir fest: im Falle reeller Verzweigungswerte sei längs des + Randes der Übergangslinie D s_1 positiv, s_2 negativ. Wir wollen für diesen Fall die Zuordnung der Funktionswerte zu den Punkten der Riemannschen Fläche genauer verfolgen. Wir setzen, Reelles und Imaginäres trennend

$$x = X + iY, \qquad s = U + iV.$$

Aus (1) folgt

$$U^2 - V^2 = 4X^3 - g_2 X - g_3 - 12 X Y^2 \tag{2}$$

und

$$2UV = (12X^2 - 4Y^2 - g_2)Y. \tag{3}$$

Das Produkt UV verschwindet längs der Abszissenachse und längs der Hyperbel, deren Gleichung

$$3X^2 - Y^2 = \tfrac{1}{4} g_2$$

ist und zwar gilt dies für beide Blätter der Riemannschen Fläche. Längs der Übergangslinien $e_1 + \infty$ und $e_2 e_3$ ist s reell, also $V = 0$. Längs der Abschnitte $-\infty\, e_3$ und $e_2\, e_1$ der Abszissenachse ist $U = 0$. Die Punkte, in denen die Hyperbel die Abszissenachse schneidet, sind durch die Gleichung

$$3X^2 - \tfrac{1}{4} g_2 = 0$$

bestimmt; der eine derselben liegt zwischen den Punkten e_2 und e_1, der andere zwischen den Punkten e_3 und e_2; im ersten Punkt ist daher $U = 0$, im letzteren $V = 0$. Daher muß auf dem ganzen Ast der Hyperbel, der durch den ersten Punkt geht, $U = 0$, und auf dem Ast, der durch den zweiten Punkt geht, $V = 0$ sein. Es ergibt sich dies sofort aus der Bemerkung, daß in keinem Punkt der Hyperbel die beiden Größen U und V verschwinden, und daß in jedem Punkt derselben eine dieser Größen verschwindet.

Die Größen U und V haben — wie aus (3) hervorgeht — in den Punkten, die gleichzeitig im Innern der positiven Halbebene und im Innern der Hyperbel liegen das gleiche Vorzeichen, ebenso in den Punkten, die gleichzeitig in der negativen Halbebene und außerhalb der Hyperbel liegen. In den übrigen Teilen der Fläche T haben sie entgegengesetzte Vorzeichen.

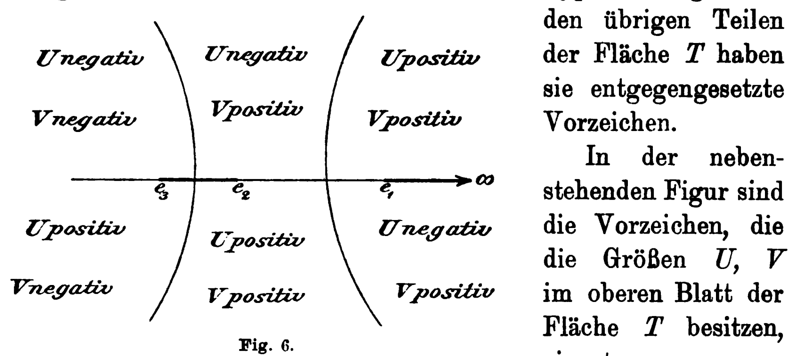


Fig. 6.

In der nebenstehenden Figur sind die Vorzeichen, die die Größen U, V im oberen Blatt der Fläche T besitzen, eingetragen.

Für den Fall, daß die Verzweigungswerte e_ν komplex sind, bemerken wir zunächst: längs der Doppellinie D sind die Quotienten

$$\frac{x-e_3}{e_1-e_3} \quad \text{und} \quad \frac{x-e_1}{e_1-e_3}$$

reell und positiv, der Quotient

$$\frac{x-e_2}{x-e_3}$$

konvergiert gegen 1, wenn der Punkt x ins Unendliche rückt. Folglich konvergiert der kleinste Wert der Funktion

$$\operatorname{arc} \frac{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}{(e_1-e_3)^3} = \operatorname{arc}\left[\frac{x-e_1}{e_1-e_3}\cdot\frac{x-e_2}{x-e_3}\cdot\left(\frac{x-e_3}{e_1-e_3}\right)^2\right]$$

gegen Null. Wir können deshalb festsetzen:

Rückt der Punkt x im oberen Blatt längs $\overset{+}{D}$ ins Unendliche, so ist

$$\lim \operatorname{arc} \frac{s}{(\sqrt{e_1-e_3})^3} = 2m\pi,$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet.

Das Vorzeichen von $\sqrt{e_1-e_3}$ kann beliebig gewählt werden. Wir wollen festsetzen, es sei

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc}\sqrt{e_1-e_3} \leqq \frac{\pi}{2},$$

es sei also der reelle Teil der Wurzel, wenn er nicht verschwindet, positiv. Wenn er verschwindet, so sei die Wurzel positiv imaginär.

Nachdem dies festgesetzt ist, ist das Vorzeichen von s auf Grund des Prinzips der analytischen Fortsetzung für die ganze Fläche T eindeutig bestimmt.

Einer späteren Anwendung wegen fügen wir noch die folgende Bemerkung hinzu: gehen wir im unteren Blatt auf einem Halbkreis, dessen Mittelpunkt auf der Strecke $e_1 e_3$ liegt und dessen Radius sehr groß ist, von einem Punkt des Randes $\overset{+}{D}$ zu einem Punkt des Vektors L über, der vom Punkt e_3 aus in der Richtung $e_1 e_3$ ins Unendliche läuft (s. die nebenstehende Figur), so wächst jede der Größen

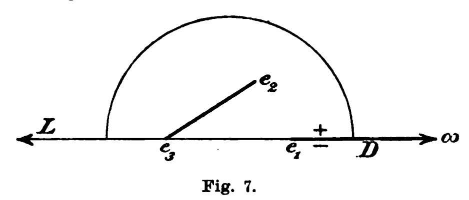


Fig. 7.

$$\text{arc}\,(x - e_1) \text{ und } \text{arc}\,(x - e_3)$$

um π, die Zunahme von arc $(x - e_2)$ ist nur wenig von π verschieden. Folglich wächst arc s nahezu um $\frac{3\pi}{2}$. Daraus folgt: Rückt der Punkt x im unteren Blatt längs des Vektors L ins Unendliche, so gilt die Gleichung

$$\lim \text{arc} \frac{s}{(\sqrt{e_1 - e_3})^3} = (4m + 1)\frac{\pi}{2},$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet.

Diese Bestimmung steht im Einklang mit der für reelle Verzweigungspunkte getroffenen.

§ 22. Über die Funktionen, die auf der Fläche T einwertig sind. Bezeichnen wir mit A und B einwertige Funktionen der komplexen Variabeln x. Die Werte der Funktion

$$(1) \qquad F = A + Bs$$

sind den Punkten der Fläche T eindeutig zugeordnet; man bezeichnet deswegen F als einwertige Funktion des Orts in der Fläche T.

Umgekehrt läßt sich jede einwertige Funktion des Ortes in der Fläche T in der Form (1) darstellen.

Um dies zu beweisen, repräsentieren wir die Werte der komplexen Variabeln x außer durch die Punkte der zweiblättrigen Fläche T auch noch durch die Punkte der einfachen Ebene E. Die sich deckenden Punkte der Fläche T, die demselben Punkt der Ebene E entsprechen, unterscheiden wir als Punkte (x, s_1) und (x, s_2). Die Werte, die die Funktion F in diesen beiden Punkten annimmt, bezeichnen wir mit F_1 und F_2. Wir setzen

$$F_1 + F_2 = 2A, \quad \frac{F_1 - F_2}{s_1 - s_2} = B. \tag{2}$$

Beschreibt der Punkt x in der Ebene E einen in sich zurücklaufenden Weg, so beschreibt entweder jeder der beiden Punkte (x, s_1) und (x, s_2) in der Fläche T ebenfalls einen in sich zurücklaufenden Weg, oder der Punkt (x, s_1) gelangt nach (x, s_2) und der Punkt (x, s_2) gelangt nach (x, s_1). Im ersten Fall kehrt eine jede der Funktionen F_1, F_2, s_1, s_2 zu ihrem Anfangswert zurück, im letzteren Falle ist der Endwert von F_1 gleich dem Anfangswert von F_2 und vice versa und ebenso vertauschen sich die Werte s_1 und s_2. Folglich kehren die Funktionen A und B auf jeden Fall zu ihren Anfangswerten zurück; sie sind also einwertige Funktionen der Variabeln x.

Aus (2) folgt, weil $s_1 + s_2 = 0$ ist,

$$F_1 = A + Bs_1, \qquad F_2 = A + Bs_2,$$

w. z. b. w.

Bezeichnen wir mit x_0 einen Wert der Variabeln x, der mit keinem der Verzweigungswerte zusammenfällt, und mit o einen der beiden Punkte der Fläche T, die diesem Wert entsprechen. Um den Punkt o legen wir einen Kreis K, der durch den nächsten Verzweigungspunkt der Fläche T geht. Innerhalb K ist F einwertige Funktion der Variabeln x. Daher läßt sich die Funktion F, wenn sie sich im Punkt o regulär verhält, in der Umgebung dieses Punktes in eine Taylorsche Reihe

$$F = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

entwickeln.*) Ist in der Reihe der Koeffizienten

$$c_0, \ c_1, \ c_2 \cdots$$

*) Vgl. F. Th. § 26.

c_n der erste, der nicht verschwindet, so wird im Punkt o der Quotient

$$\frac{F}{(x-x_0)^n}$$

weder Null noch unendlich. Man sagt in diesem Fall: die Funktion F wird im Punkt o Null zur n-ten Ordnung.

Wird die Funktion F im Punkt o unstetig, so läßt sie sich in der Umgebung dieses Punktes durch eine Laurentsche Reihe*)

$$F = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{c_{-1}}{x-x_0} + \frac{c_{-2}}{(x-x_0)^2} + \cdots$$

darstellen. Man bezeichnet den Punkt o als einen Pol oder als einen wesentlich singulären Punkt der Funktion F, je nachdem die vorstehende Reihe eine endliche oder unendliche Anzahl von negativen Potenzen enthält. Bricht im ersten Fall die Reihe der Koeffizienten

$$c_{-1},\quad c_{-2},\quad c_{-3}$$

mit dem Koeffizienten c_{-n} ab, so wird das Produkt

$$(x-x_0)^n F$$

im Punkt o weder Null noch unendlich. Man sagt in diesem Falle, die Funktion F wird im Punkt o zur n-ten Ordnung unendlich.

§ 23. Reihenentwicklungen für die Umgebung der Verzweigungspunkte. Wenn der Punkt o der Riemannschen Fläche mit keinem der Verzweigungspunkte zusammenfällt, so kann man um ihn einen Kreis beschreiben, der aus der Fläche T eine schlichte (einblättrige) Kreisfläche herausschneidet; wenn dagegen der Punkt o in einen der Verzweigungspunkte fällt, so trifft das nicht mehr zu. Darauf beruht es, daß im ersten Falle die Reihenentwicklungen, die für einwertige Funktionen gelten, anwendbar bleiben, im letzteren nicht.

Ein vom Verzweigungspunkt e_ν ausgehender Vektor wird durch eine Drehung um 360° nicht in die Anfangslage zurück-

*) Vgl. F. Th: § 27.

gebracht, sondern er gelangt, die Doppellinie, die im Punkt e_ν endigt, überschreitend, in das andere Blatt der Fläche T. Erst nach einer Drehung um 720⁰ kehrt er in die Anfangslage zurück.

Auf dem beweglichen Vektor grenzen wir eine Strecke ab, die kleiner als die Entfernung des Punktes e_ν vom nächsten Verzweigungspunkt ist.

Das abgeschnittene Stück des Vektors überstreicht bei der Drehung um 720⁰ eine zweiblättrige Kreisfläche; man bezeichnet sie als „Windungsfläche“ W. Diese Windungsfläche läßt sich leicht auf eine schlichte Kreisfläche abbilden. Zu dem Zweck setzen wir

$$x - e_\nu = re^{it}, \tag{1}$$

$$y = \sqrt{x - e_\nu} = \varrho e^{i\vartheta}. \tag{2}$$

Der Arkus ϑ ist durch die vorstehende Gleichung nur bis auf ein Multiplum von π bestimmt; wir wollen festsetzen, dem Werte $t = 0$ entspreche der Wert $\vartheta = 0$. Es ist somit

$$\varrho = \sqrt{r}, \qquad \vartheta = \tfrac{1}{2}t. \tag{3}$$

Überstreicht der Radius Vektor r nacheinander die beiden Blätter der Windungsfläche W, so überstreicht der Radius Vektor ϱ die Fläche eines Kreises um den Nullpunkt der y-Ebene. Die Windungsfläche W wird demnach eindeutig auf eine schlichte Kreisfläche K abgebildet.

Eine jede Funktion

$$F = A + Bs,$$

deren Werte den Punkten der Windungsfläche eindeutig zugeordnet sind, ist auch für die Kreisfläche K eindeutig definiert.

Daraus folgt: wenn die Funktion F im Punkt e_ν stetig ist, so läßt sie sich in eine nach steigenden Potenzen der Größe

$$y = \sqrt{x - e_\nu}$$

fortschreitende Reihe entwickeln. Wird die Funktion F im Punkt e_ν unstetig, so tritt an Stelle dieser Reihenentwicklung eine nach auf- und absteigenden Potenzen von y fortschreitende Laurentsche Reihe.

Wir bezeichnen den Verzweigungspunkt e_ν als Nullpunkt n-ter Ordnung der Funktion F, wenn F als Funktion von y

betrachtet für $y = 0$ zur n-ten Ordnung Null wird. Dementsprechend bezeichnen wir den Punkt e_ν als Pol n-ter Ordnung, wenn F als Funktion der Variabeln y betrachtet für $y = 0$ zur n-ten Ordnung unendlich wird.

Wir müssen an dieser Stelle auf einen wesentlichen Unterschied aufmerksam machen, der zwischen den einwertigen Funktionen einer Variabeln und den in der Fläche T einwertigen Funktionen besteht.

Wenn eine einwertige Funktion einer Variabeln in einem bestimmten Punkt stetig ist, so gilt dasselbe für ihre sämtlichen Derivierten. Dieser Satz gilt für Funktionen, die in der Fläche T einwertig sind, nur insoweit es sich um gewöhnliche Punkte der Fläche T handelt, für die im Endlichen liegenden Verzweigungspunkte e_ν gilt er nicht.

Da die Funktion F in der Umgebung des Verzweigungspunktes e_ν als einwertige Funktion der Variabeln

$$y = \sqrt{x - e_\nu}$$

betrachtet werden kann, so folgt aus der Stetigkeit der Funktion die Stetigkeit der Derivierten

$$\frac{dF}{dy}, \quad \frac{d^2F}{dy^2}, \quad \frac{d^3F}{dy^3} \cdots$$

Dagegen werden die Derivierten

$$\frac{dF}{dx}, \quad \frac{d^2F}{dx^2}, \quad \frac{d^3F}{dx^3} \cdots$$

wenigstens von einer bestimmten Ordnung an unstetig. Wenn der Differentialquotient

$$\frac{dF}{dy}$$

für $y = 0$ nicht verschwindet, so wird der Differentialquotient

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{2y} \frac{dF}{dy}$$

in e_ν zur ersten Ordnung unendlich.

Für das unendlich ferne Gebiet gelten ganz analoge Überlegungen. Es wird das sofort klar, wenn man sich zur geometrischen Repräsentation statt der ebenen Riemannschen Fläche der Riemannschen Kugel bedient.

Wenn an Stelle des Verzweigungspunktes e_ν der unendlich ferne Punkt tritt, so treten an Stelle der Gleichungen (1) bis (3) die folgenden

$$x = re^{it}, \tag{4}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{x}} = \varrho e^{i\vartheta}, \tag{5}$$

$$\varrho = \sqrt{\frac{1}{r}}, \qquad \vartheta = -\tfrac{1}{2}t. \tag{6}$$

Für den unendlich fernen Punkt stellen wir die folgenden Definitionen auf: Die Funktion F heißt stetig im unendlich fernen Punkt der Fläche T, wenn sie als Funktion der Variabeln y betrachtet für $y = 0$ stetig ist.

Der unendlich ferne Punkt wird als Nullpunkt oder als Pol n-ter Ordnung der Funktion F bezeichnet, wenn F als Funktion der Variabeln y betrachtet für $y = 0$ zur n-ten Ordnung Null beziehungsweise unendlich wird.

Wenn die Funktion F im unendlich fernen Punkt der Fläche T stetig ist, so läßt sie sich in der Umgebung dieses Punktes durch eine nach steigenden Potenzen der Größe

$$\sqrt{\frac{1}{x}}$$

fortschreitende Reihe darstellen; wird sie in diesem Punkt unstetig, so tritt an Stelle dieser Reihe eine Laurentsche Reihe, die nach auf- und absteigenden Potenzen der genannten Größe fortschreitet. Je nachdem die Anzahl der positiven Potenzen von $\sqrt{x}$, die in der Reihenentwicklung vorkommen, endlich oder unendlich ist, wird der unendlich ferne Punkt als Pol oder als wesentlich singulärer Punkt bezeichnet.

Wenn die Funktion F im unendlich fernen Punkt stetig ist, so gilt dasselbe für ihre sämtlichen Derivierten; die erste Derivierte verschwindet mindestens zur dritten Ordnung, die n-te Derivierte mindestens zur Ordnung $2n + 1$.

Man überzeugt sich hiervon, indem man die Reihe

$$F = c_0 + \frac{c_1}{\sqrt{x}} + \frac{c_2}{(\sqrt{x})^2} + \cdots$$

die die Funktion in der Umgebung des unendlich fernen Punktes darstellt, gliedweise differenziert.

§ 24. Die ganzen rationalen Funktionen der Fläche T. Es sei

$$F = A + Bs \tag{1}$$

eine in der Fläche T einwertige Funktion, die nur eine endliche Anzahl von Polen aber keinen wesentlich singulären Punkt besitzt. Wir bezeichnen wie oben mit F_1, F_2 die Werte, die sie in sich deckenden Punkten der Fläche T annimmt. Die Funktionen

$$A = \tfrac{1}{2}(F_1 + F_2) \text{ und } B = \frac{F_1 - F_2}{s_1 - s_2}$$

sind einwertige Funktionen der Variabeln x (§ 22), die nur eine endliche Anzahl von Polen aber keinen wesentlich singulären Punkt besitzen, sie sind folglich rationale Funktionen der Variabeln x.*) Man bezeichnet deshalb F als „rationale Funktion der Fläche T".

Nehmen wir an, die Funktion F bleibe im Endlichen überall stetig. Unter dieser Voraussetzung bleibt auch die Funktion A im Endlichen überall stetig, folglich ist A eine ganze rationale Funktion der Variabeln x.

Die Differenz $F_1 - F_2$ bleibt ebenfalls im Endlichen überall stetig; wir schließen daraus, daß die Funktion B im Endlichen höchstens in den Verzweigungspunkten unstetig werden kann und zwar kann sie im Punkt e_ν höchstens zur ersten Ordnung, also wie die Funktion

$$\frac{\text{Konst.}}{\sqrt{x - e_\nu}}$$

unendlich werden. Als rationale Funktion der Variabeln x muß aber die Funktion B, wenn sie überhaupt unstetig wird, mindestens wie die Funktion

$$\frac{\text{Konst.}}{x - e_\nu}$$

also zur zweiten Ordnung unendlich werden. Daraus folgt:

Die Funktion B bleibt in den Verzweigungspunkten e_ν stetig, ist also ebenfalls eine ganze rationale Funktion der Variabeln x.

---

*) F. Th. § 28 Schluß.

Wenn die in der Fläche T einwertige Funktion F im Endlichen nirgends unstetig wird und im Unendlichen höchstens eine polare Unstetigkeit besitzt, so sind demnach die in der Gleichung (1) vorkommenden Größen A und B ganze rationale Funktionen der Variabeln x.

Man bezeichnet in diesem Falle F als ganze rationale Funktion der Fläche T.

Die Ordnung, zu der die ganze rationale Funktion F im unendlich fernen Punkt der Fläche T unendlich wird, bezeichnet man als Ordnung der ganzen Funktion F.

Die Anzahl der Nullpunkte einer ganzen rationalen Funktion F ist gleich ihrer Ordnungszahl.

Bei der Abzählung ist ein Nullpunkt der Ordnung k als k einfachen Nullpunkten äquivalent zu betrachten.

Um den ausgesprochenen Satz zu beweisen, bezeichnen wir die Ordnung der Funktion F mit n, die Grade der ganzen Funktionen A, B der Variabeln x mit λ, μ. Die Zahl n ist gleich der größeren der beiden Zahlen 2λ und $2\mu + 3$.

Wir setzen zunächst voraus, die beiden ganzen Funktionen A und B besitzen keinen gemeinschaftlichen Teiler.

Die Werte der Variabeln x, für die die Funktion F verschwindet, sind durch die Gleichung

$$A^2 - B^2 s^2 = 0 \tag{2}$$

bestimmt, deren Grad $= n$ ist. Einer k-fachen Wurzel x_1 der Gleichung (2) entspricht in der Fläche T ein k-facher Nullpunkt der Funktion F. Das Blatt der Fläche, auf dem er liegt, ist durch die Gleichung

$$A(x_1) + B(x_1) \cdot s = 0$$

bestimmt. Die Anzahl der Nullpunkte der Funktion F ist also in diesem Falle in der Tat gleich dem Grad n der Gleichung (2).

Nehmen wir nun an, die Funktionen A und B besitzen einen gemeinschaftlichen Divisor D vom Grade ν und setzen wir

$$A = DA', \qquad B = DB'.$$

Die Funktion A' ist vom Grade $\lambda - \nu$, die Funktion B' vom Grade $\mu - \nu$, folglich ist die Ordnung der Funktion

$$F' = A' + B's$$

$= n - 2\nu$; ebenso groß ist die Anzahl ihrer einfachen Nullpunkte. Einer k-fachen Wurzel der Gleichung

$$D = 0$$

entsprechen in der Fläche T zwei k-fache Nullpunkte der Funktion

$$F = D \cdot F',$$

nämlich auf jedem Blatt der Fläche einer. Die Anzahl der Nullpunkte ist daher

$$(n - 2\nu) + 2\nu = n, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Die Anzahl der verfügbaren Konstanten, von denen die Funktion F abhängt, ist um zwei Einheiten größer als die Summe der Gradzahlen der ganzen Funktionen A und B, also $= \lambda + \mu + 2$. Die Zahl ist gleich der Ordnungszahl n, wenn $\mu = \lambda - 1$ oder $= \lambda - 2$ ist, andernfalls ist sie $< n$. Die Lage der Nullpunkte der Funktion F hängt nur von den Verhältnissen dieser Konstanten also höchstens von $n - 1$ verfügbaren Parametern ab. Daher können von den n Nullpunkten der ganzen rationalen Funktion n-ter Ordnung F nur $n - 1$ vorgeschrieben werden; der n-te ist durch die übrigen bestimmt.

Es hat keine Schwierigkeit, die zwischen den Nullpunkten bestehende Relation nachzuweisen. Der Kürze halber wollen wir uns dabei auf den Fall beschränken, daß die Funktion von gerader Ordnung ($n = 2m$) ist und daß sie nur einfache Nullpunkte besitzt. In diesem Falle läßt sich die Funktion F in der Form

$$F = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \cdots + c_m x^m) + (\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 \cdots + \gamma_{m-2} x^{m-2}) s$$

darstellen, wo $c_0 c_1 c_2 \ldots$, $\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \ldots$ verfügbare Konstante bedeuten. Die Funktion verschwinde in den Punkten (b_μ, β_μ) $(\mu = 1, 2, \cdots 2m)$.

Durch Elimination der Koeffizienten erhalten wir die Gleichung

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_1^2 & \cdots & b_1^m & \beta_1 & b_1\beta_1 & b_1^2\beta_1 & \cdots & b_1^{m-2}\beta_1 \\ 1 & b_2 & b_2^2 & \cdots & b_2^m & \beta_2 & b_2\beta_2 & b_2^2\beta_2 & \cdots & b_2^{m-2}\beta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & b_{2m} & b_{2m}^2 & \cdots & b_{2m}^m & \beta_{2m} & b_{2m}\beta_{2m} & b_{2m}^2\beta_{2m} & \cdots & b_{2m}^{m-2}\beta_{2m} \end{vmatrix} = 0$$

Es ist einleuchtend, daß diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, damit es eine ganze Funktion gibt, die in den $2m$ Punkten (b_μ, β_μ) verschwindet.

Der Fall, daß Nullpunkte höherer Ordnung auftreten, läßt sich als Grenzfall betrachten. Nehmen wir beispielsweise an, der Punkt (b_2, β_2) nähere sich unbegrenzt dem Punkt (b_1, β_1). Um die entsprechende Bedingungsgleichung zu erhalten, subtrahieren wir die Elemente der ersten Zeile der vorstehenden Determinante von denen der zweiten und dividieren dann durch $b_2 - b_1$. Lassen wir dann $b_2 - b_1$ gegen Null konvergieren, so erhalten die Elemente der zweiten Zeile die Werte

$$0, 1, 2b_1, \cdots, mb_1^{m-1}, \beta_1', \beta_1 + b_1\beta_1', \cdots, (m-2)b_1^{m-3}\beta_1 + b_1^{m-2}\beta_1'.$$

Hier bedeutet β_1' den Wert, den die Derivierte

$$s' = \frac{ds}{dx}$$

im Punkt (b_1, β_1) annimmt.

In analoger Weise hat man zu verfahren, wenn sich mehrere Nullpunkte zu einem Nullpunkt höherer Ordnung vereinigen.

Die Ordnung der ganzen Funktion

$$F = A + Bs$$

ist, wenn die Funktion B nicht identisch verschwindet, mindestens $= 3$. Wenn die Funktion B identisch verschwindet und die Funktion A vom ersten Grad ist, so ist die Ordnung $= 2$.

Es gibt somit keine ganze rationale Funktion der Fläche T von der ersten Ordnung und jede ganze Funktion zweiter Ordnung ist eine lineare Funktion der Variabeln x.

Wir ziehen aus unseren Betrachtungen noch den Schluß:

Es gibt keine in der Fläche T einwertige Funktion, die überall — im Endlichen und im Unendlichen — stetig ist.

Eine derartige Funktion müßte nämlich, weil sie im Endlichen überall stetig ist und im Unendlichen keine wesentlich singuläre Stelle besitzt, eine ganze rationale Funktion der Fläche T sein. Aber jede ganze rationale Funktion wird im Unendlichen mindestens zur zweiten Ordnung unendlich.

§ 25. Die gebrochenen rationalen Funktionen der Fläche T. Eine jede rationale Funktion F der Fläche T läßt sich, wie wir gesehen haben, in der Form

$$F = A + Bs$$

darstellen, wo A und B rationale Funktionen der Variabeln x bedeuten. Wir bezeichnen den gemeinschaftlichen Nenner dieser beiden Funktionen mit N und setzen

$$F = \frac{C + Ds}{N}$$

wo nun C, D, N ganze rationale Funktionen der Variabeln x bedeuten. Wir bezeichnen die Ordnung der im Zähler stehenden ganzen Funktion

$$Z = C + Ds$$

mit μ, den Grad der ganzen Funktion N der Variabeln x mit ν.

Jeder Wurzel der Gleichung $N = 0$ entsprechen in der Fläche T zwei einander deckende Punkte*). Der Zähler von F verschwindet somit in μ Punkten der Fläche T, der Nenner in 2ν Punkten. Es sei λ die Anzahl der gemeinschaftlichen Nullpunkte des Zählers und des Nenners.

Die Zahl λ kann nicht größer sein als die Zahl ν. Wäre nämlich $\lambda > \nu$, so müßten unter den gemeinschaftlichen Nullpunkten zwei sich deckende Punkte der Fläche T vorkommen, es müßten daher für einen Wert der Variabeln die drei Funktionen

$$C + Ds, \quad C - Ds, \quad N,$$

also auch die drei Funktionen

$$C, \quad D, \quad N$$

gleichzeitig verschwinden. Ein gemeinsamer Faktor dieser Funktionen kann aber weggehoben werden.

In den $\mu - \lambda$ Nullpunkten des Zählers, die nach Ausscheidung der gemeinschaftlichen Nullpunkte von Zähler und Nenner übrig bleiben, verschwindet die Funktion F zur ersten

*) Wenn ein Nullpunkt des Nenners in den Verzweigungspunkt e_ν fällt, so ist er doppelt zu zählen, weil in diesem Punkt $\sqrt{x - e_\nu}$ zur ersten, also $x - e_\nu$ zur zweiten Ordnung verschwindet (vgl. § 23).

Ordnung, in den $2\nu - \lambda$ übrig bleibenden Nullpunkten des Nenners wird sie zur ersten Ordnung unendlich.

Im unendlich fernen Punkt wird der Zähler zur Ordnung μ, der Nenner zur Ordnung 2ν unendlich. Ist $\mu = 2\nu$, so wird die Funktion F im Unendlichen weder Null noch unendlich, in diesem Falle liegen im Endlichen gleichviel Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte der Funktion.

Ist $\mu > 2\nu$, so wird die Funktion im Unendlichen zur Ordnung $\mu - 2\nu$ unendlich, ist $\mu < 2\nu$, so wird sie im Unendlichen Null zur Ordnung $2\nu - \mu$.

Im ersteren Falle tritt zu den im Endlichen liegenden $2\nu - \lambda$ Polen noch ein $\mu - 2\nu$-facher Pol im Unendlichen hinzu, im letzteren Fall tritt zu den $\mu - \lambda$ im Endlichen liegenden Nullpunkten noch der $2\nu - \mu$-fache Nullpunkt im Unendlichen hinzu. Auf jeden Fall ist somit die Anzahl der einfachen Nullpunkte der Funktion F gleich der Anzahl der einfachen Unstetigkeitspunkte.

Diese Anzahl bezeichnet man als „Ordnung" der rationalen Funktion F der Fläche T.

Die Funktion F — Konst. besitzt dieselben Unstetigkeitspunkte wie die Funktion F, also auch dieselbe Anzahl der Nullpunkte. Daraus folgt:

Eine rationale Funktion der Fläche T nimmt jeden vorgeschriebenen Wert in so viel Punkten an, als ihre Ordnungszahl angibt.

Die ganze Funktion μ-ter Ordnung $C + Ds$ hängt, wie im vorigen Paragraphen nachgewiesen worden ist, von μ verfügbaren Konstanten ab, die ganze Funktion N der Variabeln x von $\nu + 1$ Konstanten. Zwischen diesen Konstanten bestehen aber, weil nach Voraussetzung die Funktionen $C + Ds$ und N λ Nullpunkte gemein haben, λ Relationen und zwar beziehen sich diese Relationen auf die Verhältnisse der $\mu + \nu + 1$ Konstanten, von diesen Verhältnissen bleiben also nur $\mu + \nu - \lambda$ verfügbar. Die Funktion F hängt nur von den Verhältnissen der in Rede stehenden Konstanten, also von

$$n' = \mu + \nu - \lambda$$

verfügbaren Parametern ab.

Wenn $\mu \geqq 2\nu$ ist, so ist die Ordnung der Funktion F

$$n = \mu - \lambda,$$

folglich

$$n' = 2n - (\mu - 2\nu) - (\nu - \lambda)$$

also wegen $\nu \geqq \lambda$

$$n' \leqq 2n.$$

Wenn $\mu < 2\nu$ ist, so ist die Ordnung der Funktion F

$$n = 2\nu - \lambda$$

folglich

$$n' = 2n - (2\nu - \mu) - (\nu - \lambda).$$

Es ist also auch in diesem Falle

$$n' \leqq 2n.$$

Die Anzahl der verfügbaren Parameter, von denen die Funktion F abhängt, ist also höchstens doppelt so groß, als ihre Ordnungszahl n. Die Lage der Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte hängt nur von den Verhältnissen dieser Parameter ab, also nur von $2n - 1$ Parametern. Zwischen den $2n$ Punkten, in denen die Funktion F verschwindet und unstetig wird, muß demnach eine Relation bestehen.

Wir wollen diese Relation für den Fall feststellen, daß die Funktion F nur einfache Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte besitzt und daß alle diese Punkte im Endlichen liegen. Nehmen wir an, die Funktion F werde in den Punkten

$$(1) \qquad (a_1, \alpha_1), \quad (a_2, \alpha_2), \quad \cdots, \quad (a_n, \alpha_n)$$

unendlich und sie verschwinde in den Punkten

$$(2) \qquad (b_1, \beta_1), \quad (b_2, \beta_2), \quad \cdots, \quad (b_n, \beta_n).$$

Wir haben in diesem Fall

$$N = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

zu setzen. Die Funktion

$$Z = NF$$

wird im Endlichen nirgends unstetig, im Unendlichen wird sie zur $2n$-ten Ordnung unendlich. Folglich ist Z eine ganze Funktion von der Ordnung $2n$. Die Funktion Z verschwindet in den Punkten (2), den Nullpunkten der Funktion F und sie verschwindet außerdem in den Punkten

$$(3) \qquad (a_1, -\alpha_1), \quad (a_2, -\alpha_2), \quad \cdots, \quad (a_n, -\alpha_n).$$

Denn in diesen Punkten verschwindet die Funktion N, während die Funktion F stetig bleibt. Die Punkte (2) und (3) sind demnach die Nullpunkte einer ganzen Funktion der Ordnung $2n$, es besteht folglich zwischen ihnen eine Relation, von der im vorigen Paragraphen unter (3) angegebenen Art.

Wir haben im vorigen Paragraphen den Satz bewiesen, daß keine ganze rationale Funktion der Fläche T von der ersten Ordnung existiert. Wir können nunmehr den allgemeineren Satz beweisen:

Es gibt keine rationale Funktion der Fläche T von der ersten Ordnung.

Zum Beweis nehmen wir einen Augenblick an, die Funktion werde im Punkt (a, α) zur ersten Ordnung unendlich, von diesem Punkt abgesehen sei sie überall stetig. Die Funktion

$$Z = (x - a)F$$

ist eine ganze Funktion zweiter Ordnung, also eine lineare Funktion der Variabeln (s. den Schluß des vorigen Paragraphen). Diese Funktion muß im Punkt $(a, -\alpha)$ verschwinden, folglich ist

$$Z = \text{Konst.}\,(x - a).$$

Daher reduziert sich die Funktion auf eine Konstante, im Widerspruch zu unserer Annahme, daß sie im Punkt (a, α) unendlich wird.

§ 26. Partialbruchzerfällung der rationalen Funktionen der Fläche T. Im vorausgehenden ist die Bestimmung einer rationalen Funktion F der Fläche T durch ihre Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte erörtert worden, im folgenden soll die Funktion durch die Art, wie sie unstetig wird, charakterisiert werden.

Eine rationale Funktion der Fläche T, die nur in einem Punkt zur ersten Ordnung unendlich wird, gibt es nicht (s. den vorigen Paragraphen), wir können aber eine Funktion zweiter Ordnung der Art bestimmen, daß sie in einem beliebig zu wählenden Punkt (a, α) und außerdem in einem festen Punkt zur ersten Ordnung unendlich wird. Wir wählen als festen Punkt den unendlich fernen Punkt der Fläche und setzen

$$\varphi = \frac{s + \alpha}{2(x - a)}. \tag{1}$$

Für die Umgebung des Punktes (a, α) gilt die Reihenentwicklung

$$(2) \qquad s = \alpha + \frac{d\alpha}{da}(x-a) + \frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{da^2}(x-a)^2 + \cdots.$$

Hieraus folgt

$$(3) \qquad \varphi = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{1}{2}\frac{d\alpha}{da} + \frac{1}{4}\frac{d^2\alpha}{da^2}(x-a) + \cdots.$$

Die Funktion φ wird also im Punkt (a, α) zur ersten Ordnung unendlich. Im Punkt $(a, -\alpha)$ verschwinden Zähler und Nenner der Funktion φ zur ersten Ordnung, die Funktion φ bleibt also stetig.

Für die Umgebung des unendlich fernen Punktes gelten die Reihenentwicklungen

$$s + \alpha = 2(\sqrt{x})^3 \sqrt{1 - \frac{g_2 x + g_3}{4x^3}} + \alpha$$

$$= 2(\sqrt{x})^3 + \alpha - \frac{1}{4}\frac{g_2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4}\frac{g_3}{(\sqrt{x})^3} \cdots$$

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} + \cdots$$

Hieraus folgt

$$(4) \qquad \varphi = \sqrt{x} + \frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{\alpha}{2x} + \frac{a^2 - \frac{1}{8}g_2}{(\sqrt{x})^3} + \cdots.$$

Die Funktion φ wird also auch im unendlich fernen Punkt zur ersten Ordnung unendlich. Von dem Punkt (a, α) und dem unendlich fernen Punkt abgesehen ist die Funktion φ überall stetig.

Rückt der Unstetigkeitspunkt (a, α) in den Verzweigungspunkt e_1, so ist

$$\varphi = \frac{s}{2(x-e_1)}.$$

Folglich ist

$$(5) \qquad \lim_{x=e_1} \sqrt{x-e_1}\, \varphi = \sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}.$$

Die Funktion φ wird demnach im Punkt e_1 zur ersten Ordnung unendlich. Die Gleichung (4) bleibt unverändert in Geltung. Es macht somit keinen wesentlichen Unterschied, ob der Unstetigkeitspunkt in einen gewöhnlichen Punkt oder in einen Verzweigungspunkt fällt.

Mittelst der Funktion φ läßt sich eine rationale Funktion F der Fläche T, die nur Unstetigkeitspunkte erster Ordnung besitzt, sehr einfach darstellen. Der Einfachheit der Schreibweise wegen wollen wir im folgenden einen Punkt der Fläche T nur mit einem Buchstaben bezeichnen.

Demgemäß bezeichnen wir die im Endlichen liegenden Unstetigkeitspunkte der Funktion F mit $\delta_1, \delta_2 \cdots \delta_n$.

Im Punkt δ_ν sei $x = a_\nu$, $s = \alpha_\nu$, $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ und

$$\lim (x - a_\nu) F = c_\nu. \tag{6}$$

Im unendlich fernen Punkt sei

$$\lim \frac{F}{\sqrt{x}} = - c_\infty. \tag{7}$$

Wir bezeichnen den variabeln Punkt mit o und setzen

$$\varphi(o/\delta_\nu) = \frac{s + \alpha_\nu}{2(x - a_\nu)}.$$

Im Punkt δ_ν bleibt die Differenz

$$F(o) - \frac{c_\nu}{\alpha_\nu}\varphi(o/\delta_\nu)$$

stetig ((2) u. (6)), folglich wird die Funktion

$$D(o) = F(o) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu}{\alpha_\nu}\varphi(o/\delta_\nu)$$

im Endlichen nirgends unstetig, sie ist also eine ganze Funktion.

Im Unendlichen werden die Funktionen $F(o)$ und $\varphi(o/\delta_\nu)$ nur zur ersten Ordnung unendlich, folglich kann auch die Funktion $D(o)$ höchstens zur ersten Ordnung unendlich werden. Weil es aber keine rationale Funktion der Fläche T von der ersten Ordnung gibt, muß sich $D(o)$ auf eine Konstante reduzieren. Wir erhalten also für die Funktion $F(o)$ die Darstellung

$$F(o) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu}{\alpha_\nu}\varphi(o/\delta_\nu) + \text{Konst.} \tag{8}$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $\frac{1}{\sqrt{x}}$ und lassen wir dann den Punkt o ins Unendliche rücken, so ergibt sich mit Rücksicht auf (4) und (7)

$$(9)\qquad \frac{c_1}{\alpha_1}+\frac{c_2}{\alpha_2}\cdots+\frac{c_\nu}{\alpha_r}+c_\infty=0$$

und es ist ersichtlich, daß dies die einzige Bedingung ist, denen die Unstetigkeiten der Funktion $F(o)$ unterworfen sind.

Rückt einer der Unstetigkeitspunkte — etwa der Punkt δ_1 — in den Verzweigungspunkt e_1, so tritt in den Gleichungen (8) und (9) an Stelle der Größe α_1 die Größe $\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}$ (5), im übrigen tritt keine Änderung ein.

Um auch Unstetigkeiten höherer Ordnung charakterisieren zu können, bilden wir zunächst eine Funktion φ_2, die im Punkt (a,α) zur zweiten Ordnung unendlich wird, im übrigen aber in der ganzen Fläche T stetig ist. Wir setzen (s. (1))

$$(10)\qquad \varphi_2=\alpha\frac{d\varphi}{da}=\frac{\alpha\frac{d\alpha}{da}(x-a)+\alpha(s+\alpha)}{2(x-a)^2}.$$

Um zu verifizieren, daß die Funktion φ_2 den gestellten Bedingungen genügt, bemerken wir:

Aus (10) und (3) folgt

$$(11)\qquad \varphi_2=\frac{\alpha^2}{(x-a)^2}+\frac{\alpha\frac{d\alpha}{da}}{x-a}+\frac{1}{4}\alpha\frac{d^2\alpha}{da^2}+\cdots.$$

Demnach ist im Punkt (a,α)

$$(12)\qquad \lim\,(x-a)^2\varphi_2=\alpha^2.$$

Im Punkt $(a,-\alpha)$ ist die Funktion φ_2 ebenso wie die Funktion φ stetig. Im unendlich fernen Punkt wird der Zähler des Quotienten auf der rechten Seite der Gleichung (10) zur dritten, der Nenner zur vierten Ordnung unendlich, folglich wird die Funktion φ_2 Null zur ersten Ordnung.

Die Funktion φ_2 wird also, wie gefordert ist, im Punkt (a,α) zur zweiten Ordnung unendlich, bleibt aber im übrigen überall stetig.

Die Funktion

$$\varphi_2'=\frac{d\varphi_2}{dx}$$

wird im Punkt (a,α) zur dritten Ordnung unendlich. Für die Umgebung dieses Punktes gilt die Reihenentwicklung (11)

$$(13)\qquad \varphi_2'=-\frac{2\alpha^2}{(x-a)^3}-\frac{\alpha\frac{d\alpha}{da}}{(x-a)^2}\cdots.$$

Vom Punkt (a, α) abgesehen kann die Funktion φ_2' im Endlichen nur noch in den Verzweigungspunkten unendlich werden und zwar nur zur ersten Ordnung (§ 23, S. 75). Im unendlich fernen Punkt ist die Funktion φ_2 stetig, folglich wird die Funktion φ_2' mindestens zur dritten Ordnung Null (§ 23, Schluß). Die Funktion

$$\varphi_3 = -\frac{1}{2} s \frac{d\varphi_2}{dx} \tag{14}$$

ist vom Punkt (a, α) abgesehen überall stetig, denn in den Verzweigungspunkten e_ν, in denen φ_2' zur ersten Ordnung unendlich wird, wird s zur ersten Ordnung Null und im unendlich fernen Punkt wird zwar s zur dritten Ordnung unendlich, aber φ_2' wird zur dritten Ordnung Null. Aus (13) und (14) folgt, daß im Punkt (a, α)

$$\lim (x-a)^3 \varphi_3 = \alpha^3$$

ist.

In derselben Weise, wie wir aus der Funktion φ_2 die Funktion φ_3 abgeleitet haben, leiten wir aus dieser die Funktionen $\varphi_4, \varphi_5 \cdots$ mittelst der Rekursionsformel

$$\varphi_m = -\frac{s}{m-1} \frac{d\varphi_{m-1}}{dx}, \quad m = 3, 4, 5 \cdots \tag{15}$$

ab. Die Funktion φ_m wird im Punkt (a, α) zur m-ten Ordnung unendlich, der Art daß

$$\lim (x-a)^m \varphi_m = \alpha^m \tag{16}$$

ist. Von diesem Punkt abgesehen ist die Funktion überall stetig. Man verifiziert dies ohne Schwierigkeit durch den Schluß von m auf $m+1$. Lassen wir den Punkt (a, α) in den Verzweigungspunkt e_1 rücken.

In diesem Punkt ist $\alpha = 0$ und

$$\alpha \frac{d\alpha}{da} = 2(e_1 - e_2)(e_1 - e_3).$$

Demnach ist im vorliegenden Fall

$$\varphi_2 = \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{x - e_1}.$$

Die Funktion φ_2 wird somit im Punkt e_1 zur zweiten Ordnung unendlich, bleibt aber im übrigen überall stetig. Man überzeugt sich leicht, daß die Funktion φ_m, die durch die Rekursionsformel (15) bestimmt ist, im Punkt e_1 zur m-ten

Ordnung unendlich wird, aber keine weiteren Unstetigkeitspunkte besitzt.

Es bleiben demnach, wenn der Unstetigkeitspunkt (a, α) in den Verzweigungspunkt e_1 rückt, die allgemeinen Formeln in Geltung nur tritt an Stelle der Größe $x - a$ als Maß der Unstetigkeit die Größen $\sqrt{x - e_1}$ und an Stelle der Größe α tritt die Größe $\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}$.

Aus den Funktionen $\varphi \varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_m$ können wir eine Funktion $\Phi(o/\delta)$ bilden, die in einem gegebenen Punkt $\delta(x = a, s = \alpha)$ in vorgeschriebener Weise unstetig wird. Wir nehmen den variabeln und den Unstetigkeitspunkt in die Bezeichnung auf, schreiben also statt

$$\varphi \varphi_2 \cdots \quad \text{ausführlicher} \quad \varphi(o/\delta)\, \varphi_2(o/\delta) \cdots$$

und setzen

$$\Phi(o/\delta) = c_1 \varphi(o/\delta) + c_2 \varphi_2(o/\delta) \cdots + c_m \varphi_m(o/\delta). \tag{17}$$

Die Funktion $\Phi(o/\delta)$ wird außer im Punkt δ auch noch im unendlichen fernen Punkt unstetig, der Art, daß die Differenz

$$\Phi(o/\delta) - c_1 \sqrt{x}$$

stetig bleibt (4), im übrigen ist die Funktion $\Phi(o/\delta)$ in der ganzen Fläche T stetig.

Um endlich noch die im unendlich fernen Punkt stattfindenden Unstetigkeiten zu charakterisieren, setzen wir

$$\psi_2 = x \tag{18}$$

$$\psi_m = \frac{s}{m-1} \frac{d\psi_{m-1}}{dx}, \quad m = 3, 4, 5 \cdots \tag{19}$$

Im Endlichen ist die Funktion ψ_m überall stetig, im Unendlichen wird sie zur m-ten Ordnung unendlich. Man bestätigt dies leicht durch den Schluß von m auf $m + 1$.

Eine ganze Funktion G der Ordnung m läßt sich in der Form

$$G(o) = c_2 \psi_2(o) + c_3 \psi_3(o) \cdots + c_m \psi_m(o) + \text{Konst.} \tag{20}$$

darstellen. Denn wir können zunächst die Konstante c_m so bestimmen, daß die Differenz

$$G - c_m \psi_m$$

höchstens zur $m - 1$-ten Ordnung unendlich wird; hierauf wird die Konstante c_{m-1} so bestimmt, daß die Differenz

$$G - c_m \psi_m - c_{m-1} \psi_{m-1}$$

nun mehr zur $m - 2$-ten Ordnung unendlich wird usw.

Die Differenz

$$G - c_m \psi_m - c_{m-1}\psi_{m-1} \cdots - c_2\psi_2$$

kann höchstens zur ersten Ordnung unendlich werden, sie ist also, weil es eine rationale Funktion erster Ordnung nicht gibt, eine Konstante.

Es sei nun eine rationale Funktion F der Fläche T gegeben, die in den Punkten $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n$ aber in keinem weiteren Punkt im Endlichen unstetig wird. Für jeden der Punkte δ_ν bestimmen wir eine Funktion $\Phi(o/\delta_\nu)$ (17) der Art, daß die Differenz

$$F(o) - \Phi(o/\delta_\nu)$$

im Punkt δ_ν stetig bleibt. Die Differenz

$$F(o) - \sum_{\nu=1}^{n} \Phi(o/\delta_\nu)$$

wird im Endlichen nirgends unstetig, ist also eine ganze Funktion und läßt sich demnach in der Form (20) darstellen. Wir erhalten also für die Funktion $F(o)$ die Partialbruchzerfällung

$$F(o) = \sum_{\nu=1}^{n} \Phi(o/\delta_\nu) + G(o). \tag{21}$$

Die allgemeinste rationale Funktion der Fläche T läßt sich somit aus den folgenden fünf Typen von Funktionen zusammensetzen:

Erstens: $\varphi(o/\delta) = \dfrac{s+\alpha}{2(x-a)}$.

Zweitens: $\varphi_2(o/\delta) = \dfrac{\alpha \dfrac{d\alpha}{da}(x-a) + \alpha(s+\alpha)}{2(x-a)^2} = \alpha \dfrac{d\varphi(o/\delta)}{da}$

Drittens: $\varphi_m(o/\delta) = -\dfrac{s}{m-1}\dfrac{d\varphi_{m-1}(o/\delta)}{dx}$, $\qquad m = 3, 4, 5 \cdots$

Viertens: $\psi_2(o) = x$.

Fünftens: $\psi_m(o) = \dfrac{s}{m-1}\dfrac{d\psi_{m-1}(o)}{dx}$ $\qquad m = 3, 4, 5, \cdots$

und hierzu tritt noch eine additive Konstante.

Dritter Abschnitt.

Die Integrale der rationalen Funktionen der Fläche T.

§ 27. Über die Definition der Integrale. Nachdem wir im vorausgehenden Abschnitt die Theorie der rationalen Funktionen der Fläche T entwickelt haben, wenden wir uns nun zur Untersuchung der Integrale dieser Funktionen. Dabei gehen wir — soweit nicht ausdrücklich das Gegenteil ausgesprochen wird — ebenso wie im vorigen Abschnitt von der Weierstraßschen kanonischen Form

$$s^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

aus. Wir haben zunächst die beiden Fragen zu beantworten:

unter welchen Bedingungen hat das über einen gegebenen Weg erstreckte Integral einer einwertigen Funktion des Orts in der Fläche T einen bestimmten Sinn? und

inwieweit hängt der Wert des Integrals vom Integrationsweg ab?

Bezüglich der ersten Frage ist zu bemerken: in der Umgebung eines Punktes der Fläche T, der mit keinem der Verzweigungspunkte zusammenfällt, ist eine in der Fläche T einwertige Funktion F eine einwertige Funktion der Variabeln x (§ 22). Daraus folgt:

wenn der Integrationsweg L durch keinen Verzweigungspunkt hindurch geht, ist die Bedingung, daß die Funktion F längs dieses Weges stetig ist, erforderlich und hinreichend, damit das Integral

$$\int F dx$$

einen bestimmten Sinn besitzt.

Die Umgebung des Verzweigungspunktes e_ν wird mittelst der Substitution

$$(1) \qquad y = \sqrt{x - e_\nu}$$

auf eine schlichte (einblättrige) Fläche abgebildet, die Funktion F kann daher in der Umgebung des Punktes e_ν als einwertige Funktion der Variabeln y betrachtet werden (§ 23). Daraus folgt: wenn der Integrationsweg L durch den Punkt e_ν geht, so ist, damit das Integral

$$\int F dx = \int 2 F y dy$$

einen bestimmten Sinn hat, erforderlich und hinreichend, daß die Funktion yF in diesem Punkt stetig ist.

Das Integral wird also auch dann nicht sinnlos, wenn die Funktion F im Punkte e_ν zur ersten Ordnung unendlich wird.

Die Umgebung des unendlich fernen Punktes der Fläche T wird durch die Substitution

$$(2) \qquad y = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

auf eine schlichte im Endlichen liegende Fläche abgebildet (§ 23). Dem unendlich fernen Punkt der Fläche T entspricht der Nullpunkt der y-Ebene.

Damit das Integral

$$\int F dx = -\int 2 \frac{F}{y^3} dy$$

in diesem Punkt einen bestimmten Sinn hat, ist erforderlich und hinreichend, daß die Funktion F Null zur dritten Ordnung wird. Daraus folgt: damit die Integration ins Unendliche erstreckt werden darf, ist erforderlich und hinreichend, daß die Funktion F im unendlich fernen Punkt der Fläche T mindestens zur dritten Ordnung verschwindet.

Die Funktion s wird in jedem der Verzweigungspunkte e_ν zur ersten Ordnung Null, im unendlich fernen Punkt wird sie zur dritten Ordnung unendlich.

Daher läßt sich die Bedingung dafür, daß das Integral in

einem Verzweigungspunkt endlich bleibt, auch in der Form aussprechen:

das Produkt $s \cdot F$ muß im betreffenden Verzweigungspunkt stetig sein.

Das Integral

$$\int \frac{dx}{s}$$

wird demnach nirgends unstetig.

Nehmen wir an, der Integrationsweg sei eine geschlossene, sich nicht überkreuzende Kurve, die einen isolierten Unstetigkeitspunkt der Funktion F einschließt.

In diesem Fall bezeichnet man bekanntlich das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int F dx \tag{3}$$

als Residuum der Funktion F für den betreffenden Unstetigkeitspunkt (F. Th. § 21).

Der Integrationsweg ist im positiven Sinn zu durchlaufen, d. h. der Art, daß die eingeschlossene Fläche zur Linken liegt.

In dem Fall, daß der Unstetigkeitspunkt der Funktion in einen gewöhnlichen Punkt der Fläche fällt, ergibt sich diese Definition ohne weiteres aus der für einwertige Funktionen geltenden.

Für den Fall, daß der Unstetigkeitspunkt in den Verzweigungspunkt e_ν fällt, definieren wir das Residuum unter Benutzung der Abbildung (1) durch das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int 2 F y\, dy. \tag{4}$$

Der Integrationsweg ist eine den Nullpunkt der y-Ebene einschließende, sich nicht überkreuzende Kurve; sie ist im positiven Sinn zu durchlaufen.

Analog definieren wir das dem unendlich fernen Punkte der Fläche T entsprechende Residuum unter Benutzung der Abbildung (2) durch das Integral

$$-\frac{1}{2\pi i}\int \frac{2F}{y^3}\, dy. \tag{5}$$

Der Integrationsweg ist wieder eine den Nullpunkt der y-Ebene einschließende im positiven Sinn zu durchlaufende Kurve.

Wenn der Unstetigkeitspunkt in einen gewöhnlichen Punkt der Fläche fällt, so gilt für seine Umgebung eine Reihenentwicklung der Form

$$F = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{c_{-1}}{x-a} + \frac{c_{-2}}{(x-a)^2} + \cdots$$

Das Residuum (3) ist gleich dem Koeffizienten c_{-1}.

Fällt der Unstetigkeitspunkt in den Verzweigungspunkt e_ν, so besitzt die Reihenentwicklung die Form

$$F = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots$$
$$+ \frac{c_{-1}}{y} + \frac{c_{-2}}{y^2} + \cdots$$

Das Residuum (4) hat in diesem Fall den Wert $2c_{-2}$.

Fällt der Unstetigkeitspunkt in den unendlich fernen Punkt der Fläche T, so hat die Reihenentwicklung dieselbe Form, es ist aber

$$y = \sqrt{\frac{1}{x}}.$$

Das Residuum (5) hat in diesem Fall den Wert $-2c_2$.

Wenn die Funktion F in einem gewöhnlichen Punkt $(x = a,\ s = \alpha)$ zur n-ten Ordnung Null oder unendlich wird (§ 22), so wird ihre logarithmische Derivierte unstetig wie die Funktion

$$\frac{n}{x-a} \text{ beziehungsweise wie die Funktion } -\frac{n}{x-a}.$$

Das zugehörige Residuum ist n beziehungsweise $-n$.

Wird die Funktion im Verzweigungspunkt e_ν zur n-ten Ordnung Null oder unendlich (§ 23), so wird die logarithmische Derivierte unstetig wie die Funktion

$$\frac{\frac{1}{2}n}{x-e_\nu} \text{ beziehungsweise wie die Funktion } -\frac{\frac{1}{2}n}{x-e_\nu}.$$

Das zugehörige Residuum ist wieder n beziehungsweise $-n$.

Wird die Funktion F im unendlich fernen Punkt zur

n-ten Ordnung Null oder unendlich, so verhält sich die logarithmischen Derivierte wie die Funktion

$$-\frac{\frac{1}{2}n}{x} \text{ beziehungsweise wie die Funktion } +\frac{\frac{1}{2}n}{x}.$$

Das zugehörige Residuum ist n beziehungsweise $-n$.

Auf jeden Fall also ist, wenn die Funktion zur n-ten Ordnung verschwindet, das Residuum der logarithmischen Derivierten $= n$; wenn sie zur n-ten Ordnung unendlich wird, so ist das Residuum der logarithmischen Derivierten $= -n$.

§ 28. Über die Abhängigkeit der Integrale vom Integrationsweg. Es bleibt zu untersuchen, inwieweit der Wert des Integrals vom Integrationsweg abhängt. Wir erinnern zunächst an das Fundamentaltheorem über die Ingration in der schlichten x-Ebene (s. F. Th. § 20).

I. Vorausgesetzt, daß die Funktion $\varphi(x)$ in der Fläche E einwertig ist und sich innerhalb dieser Fläche und auf ihrer Berandung regulär verhält, ist das über die vollständige Begrenzung der Fläche erstreckte Integral

$$\int \varphi(x)\, dx = 0.$$

Aus dem Fundamentaltheorem ergibt sich sofort der Residuensatz:

II. Angenommen, im Innern der Fläche E liege eine endliche Anzahl von Unstetigkeitspunkten der Funktion $\varphi(x)$. Von diesen Punkten abgesehen sei die Funktion $\varphi(x)$ im Innern und auf der Berandung der Fläche F überall einwertig und stetig. Unter dieser Voraussetzung ist das im positiven Sinn über die Berandung erstreckte Integral

$$\int \varphi(x)\, dx$$

gleich dem Produkt von $2\pi i$ in die Summe der Residuen, die zu den in der Fläche liegenden Unstetigkeitspunkten gehören (vgl. F. Th. § 21).

Aus dem Fundamentaltheorem folgt weiter (F. Th. S. 95):

III. Erstrecken wir die Integration über zwei verschiedene Wege L und L', die die Endpunkte aber keine weiteren

Punkte gemein haben, so erhalten wir denselben Integralwert, vorausgesetzt, daß die Funktion $\varphi(x)$ in der Fläche, die durch die Kurven L und L' begrenzt ist, einwertig und stetig ist.

Das Fundamentaltheorem I gilt unverändert auch für die Integration in der zweiblättrigen Fläche T*) und ebenso der aus diesem Theorem folgende Residuensatz II. Dagegen darf der Satz III nicht ohne weiteres auf die Integration in der Fläche T angewendet werden.

Um die Sachlage klar zu stellen, bemerken wir:

Man bezeichnet eine Fläche als „einfach zusammenhängend", wenn jede in der Fläche verlaufende geschlossene Kurve für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächenstücks bildet; andernfalls heißt sie „mehrfach zusammenhängend" (F. Th. § 8, S. 47). Die schlichte x-Ebene ist offenbar einfach zusammenhängend, ebenso jede schlichte Fläche, die nur **eine** Randkurve besitzt. Dagegen ist eine schlichte Fläche, die mehr als eine Randkurve besitzt, mehrfach zusammenhängend. Beispielsweise ist eine durch zwei konzentrische Kreise begrenzte Ringfläche R nicht einfach zusammenhängend, denn ein mit den Grenzkreisen konzentrischer Kreis begrenzt für sich allein noch kein Stück der Fläche.

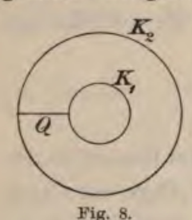


Fig. 8.

Führen wir aber einen die beiden Grenzkreise verbindenden Querschnitt Q aus (Fig. 8), so wird die zerschnittene Fläche R' einfach zusammenhängend.

Der Satz III gilt für jede einfach zusammenhängende Fläche, aber er gilt nicht ohne Einschränkung für mehrfach zusammenhängende Flächen. Er gilt also beispielsweise nicht in voller Allgemeinheit für die unzerschnittene Ringfläche R, wohl aber für die zerschnittene Fläche R'.

Auch unsere zweiblättrige **Riemannsche** Fläche T ist nicht einfach zusammenhängend, wir können sie aber, wie im folgenden Paragraphen gezeigt werden wird, durch geeignete Querschnitte in eine einfache zusammenhängende Fläche T'

---

*) Der F. Th. S. 93 gegebene Beweis setzt in keiner Weise voraus, daß die Fläche E eine schlichte Fläche ist.

zerschneiden. Für diese zerschnittene Fläche T' gilt der Satz III; es gelten also für die Integration in der Fläche T' genau dieselben Regeln wie für die Integration in der schlichten x-Ebene.

§ 29. Zerschneidung der Fläche T in eine einfach zusammenhängende Fläche T'. Bei den folgenden Erörterungen gehen wir zunächst von der allgemeinen Darstellungsform der Irrationalgröße s

$$s = \sqrt{a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)}$$

und der entsprechenden Riemannschen Fläche aus. Wir nehmen wieder an, daß die eine Übergangslinie — D — die Verzweigungspunkte α_1 und α_2, die andere — D' — die Verzweigungspunkte α_3 und α_4 verbindet (§ 20).

Wir legen nun im oberen Blatt der Fläche T um die Übergangslinie D eine geschlossene Kurve C und um die Übergangslinie D' eine geschlossene Kurve B (Fig. 9). Durch diese beiden Kurven wird die Fläche T in zwei getrennte Stücke T_1 und T_2 zerlegt. Das eine Stück — T_1 — besteht aus dem Teil des oberen Blattes, der außerhalb der Kurven B und C liegt, das andere Stück — T_2 — besteht aus dem unteren Blatt und den Teilen des oberen Blattes, die innerhalb der Kurven B und C liegen.

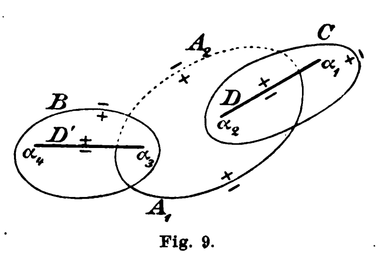


Fig. 9.

Die Begrenzung von T_1 besteht aus den äußeren Rändern der Kurven B und C; sie mögen mit $\overline{B}$ und $\overline{C}$ bezeichnet werden. Die Begrenzung von T_2 besteht aus den inneren Rändern, $\overset{+}{B}$ und $\overset{+}{C}$, dieser Kurven.

Jedes der beiden Stücke ist zusammenhängend, denn man kann von jedem Punkt eines Stückes zu jedem andern gelangen, ohne die Begrenzung zu überschreiten. Aber sie sind beide nicht einfach zusammenhängend, denn eine Kurve A_1, die die beiden Randkurven von T_1 verbindet, wird diese Fläche nicht in Stücke zerlegen und ebensowenig wird eine die beiden

Randkurven von T_2 verbindende Kurve A_2 diese Fläche zerstückeln.*) Fügen wir aber die Kurve A_1 zur Begrenzung von T_1 und die Kurve A_2 zur Begrenzung von T_2 hinzu, so werden diese Flächen in zwei einfach zusammenhängende Flächen T_1' und T_2' zerschnitten. Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, daß die auf den Kurven B und C liegenden Endpunkte der Kurven A_1 und A_2 gegenüberliegende Punkte der beiden Ränder von B beziehungsweise C sind.

Auch bei den Rändern der Kurven A_1 und A_2 unterscheiden wir einen $+$ Rand und einen $-$ Rand und zwar wollen wir die Bezeichnung der Art wählen, daß wir, die Begrenzung der Fläche T_1' im positiven Sinn durchlaufend, die Begrenzungsstücke in der Reihenfolge $\overset{+}{A}_1 \bar{C} \bar{A}_1 \bar{B}$ treffen (s. Fig. 9). Analog soll sich bei einem positiven Umlauf um die Fläche T_2' die Reihenfolge $\overset{+}{A}_2 \overset{+}{B} \bar{A}_2 \overset{+}{C}$ ergeben.

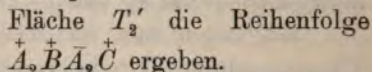


Fig. 10.

An den vorangehenden Überlegungen wird nichts wesentliches geändert, wenn man die Schnitte BCA_1A_2 deformiert, vorausgesetzt, daß bei dieser Deformation keiner der Schnitte einen Verzweigungspunkt überschreitet und daß keine neuen Schnittpunkte der Schnittkurven entstehen (s. Fig. 10).

Wir heften nun die beiden Flächen T_1' und T_2' längs der Kurve C aneinander, mit anderen Worten: wir lassen den Schnitt C wegfallen. Die beiden Flächen T_1' und T_2' vereinigen sich zu einer Fläche T und die beiden Schnitte A_1 und A_2 vereinigen sich zu einem Schnitt A, der in einem Punkt des einen Randes von B beginnt und im gegenüberliegenden Punkt des anderen Randes endigt. Die Ränder der beiden Kurven A und B bilden zusammengenommen die Randkurve der Fläche T'. Durchläuft man die Randkurve im positiven Sinne, so trifft man die Begrenzungsstücke in der Reihenfolge

$$\overset{+}{A} \, \overset{+}{B} \, \bar{A} \, \bar{B}.$$

* In Fig. 9 ist der im untern Blatt verlaufende Teil der Kurve A_2 punktiert gezeichnet.

Die Fläche T' ist zusammenhängend, denn man kann von einem Punkt auf dem einen Rand einer der Kurven A, B zum gegenüberliegenden Punkt auf dem andern Rand gelangen, ohne die Randkurve zu überschreiten.

Die Fläche T' wird durch jede geschlossene, sich nicht überkreuzende Kurve L in zwei Teile zerlegt, ist also einfach zusammenhängend.

Wenn die Kurve L ganz innerhalb der einen der beiden Flächen T_1', T_2' verläuft, ist dies ohne weiteres einleuchtend. Ist dies nicht der Fall, so muß die Kurve L die Kurve C, die die beiden Flächen T_1' und T_2' trennt, schneiden und zwar muß die Anzahl der Schnittpunkte, weil die Kurve L geschlossen ist, gerade sein. Wir bezeichnen sie mit 2ν.

Die Kurve L wird durch diese Schnittpunkte in 2ν Stücke zerlegt, die abwechslungsweise in den Flächen T_1' und T_2' liegen.

Jedes in der Fläche T_1' liegende Stück von L bildet zusammen mit dem Stück von C, das seine Endpunkte verbindet, die Begrenzung eines Stücks der Fläche T_1'. Die durch die Kurve L aus der Fläche T'_1, herausgeschnittenen Stücke mögen mit $S^{(1)}{}_1$ $S^{(2)}{}_1 \ldots S^{(\nu)}{}_1$ und das übrig bleibende Stück von T'_1 mit S_1 bezeichnet werden.

Analog bezeichnen wir mit $S^{(1)}{}_2$ $S^{(2)}{}_2 \ldots S^{(\nu)}{}_2$ die aus der Fläche T'_2 herausgeschnittenen Stücke und mit S_2 das übrig bleibende Stück von T'_2. Stellen wir nun längs C die Verbindung zwischen den angrenzenden Flächenteilen wieder her, so wird jedes der Flächenstücke $S^{(1)}{}_1$ $S^{(2)}{}_1 \ldots S^{(\nu)}{}_1$ an die Fläche S_2 und jedes der Flächenstücke $S^{(1)}{}_2$ $S^{(2)}{}_2 \ldots S^{(\nu)}{}_2$ an die Fläche S_1 geheftet. Jede dieser beiden Flächen ist zusammenhängend, die beiden Flächen aber sind durch die Kurve L getrennt.

Weil unsere Riemannsche Fläche durch zwei Querschnitte A, B in eine einfach zusammenhängende Fläche T' verwandelt wird, bezeichnet man sie als dreifach zusammenhängend.

Das Querschnittsystem A, B haben wir nur zu dem Zweck eingeführt, um die Fläche T einfach zusammenhängend zu machen; es kann deswegen durch jedes andere Querschnitt system ersetzt werden, das denselben Zweck erfüllt. Wir werden hierauf später zurückkommen (§ 39).

Unsere Betrachtungen behalten offenbar ihre Geltung, wenn wir die Weierstraßsche Normalform

$$s^2 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

zu Grunde legen. In diesem Falle legen wir die Querschnitte A, B der Art an, daß der im oberen Blatt verlaufende Querschnitt B um die Verzweigungspunkte e_2, e_3 und der die Übergangslinien überkreuzende Querschnitt A um die Verzweigungspunkte e_1, e_2 herum führt.

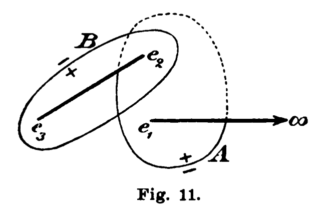


Fig. 11.

Im folgenden werden wir uns vielfach eines Querschnittsystems bedienen, das wir aus dem in Fig. 11 dargestellten durch stetige Deformation herleiten können. Wir konstruieren es in folgender Weise:

Wir legen um die Verzweigungspunkte e_2 und e_1 einfache Kreislinien*) C und C' vom Radius ϱ. Diese Kreislinien sind nicht geschlossen, sondern die Endpunkte einer jeden sind einander deckende Punkte der Fläche T. Die im oberen Blatt liegenden Endpunkte der beiden Kreislinien verbinden wir durch eine Kurve A_1, die im unteren Blatt liegenden durch eine mit A_1 sich deckende Kurve A_2 (s. Fig. 12; in der Figur ist nur die im oberen Blatt verlaufende Kurve A_1 gezeichnet). Die Kurven $A_1\,C\,A_2\,C'$ bilden zusammengenommen den Querschnitt A.

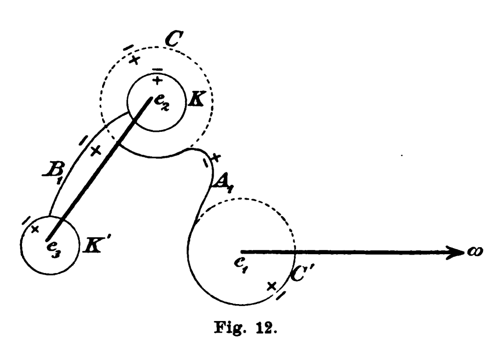


Fig. 12.

Sodann legen wir um die Punkte e_2 und e_3 einfache Kreislinien K und K' vom Radius $\varrho' < \varrho$ und verbinden die Endpunkte derselben, die im nämlichen Blatt liegen, durch

*) d. h. Kreislinien, die durch Rotation eines Vektors um 360° erzeugt werden.

einander deckende Kurven B_1 und B_2. Die Kurven $B_1 K B_2 K'$ bilden zusammen den Querschnitt B.*)

Bei dieser Anlage des Querschnittsystems kann offenbar ein Paar sich deckender Punkte $o_1 o_2$, deren Entfernung von den drei Verzweigungspunkten $e_\nu > \varrho$ ist, durch sich deckende Wege L_1, L_2, die keinen Querschnitt überschreiten, mit dem unendlich fernen Punkt der Fläche T verbunden werden.

Es steht nun nichts im Wege die Radien ϱ und ϱ' unendlich klein anzunehmen. Unter dieser Annahme bezeichnen wir das eben konstruierte Querschnittsystem als „kanonisches Querschnittsystem".

Es bietet den Vorteil, der für manche Untersuchungen in Betracht kommt, daß jedes Paar sich deckender Punkte, das eine angebbare Entfernung von den Verzweigungspunkten e_ν besitzt, durch sich deckende, innerhalb der Fläche T' verlaufende Wege mit dem unendlich fernen Punkt verbunden werden kann. Nur für die Punktepaare, die unendlich nahe an einem der Punkte e_ν liegen tritt eine Ausnahme ein: verbinden wir einen der Punkte e_1, e_3 mit dem unendlich fernen Punkt durch sich deckende Wege L_1, L_2, so muß mindestens der eine der beiden Wege den Querschnitt A beziehungsweise den Querschnitt B überschreiten. Verbinden wir den Punkt e_2 durch sich deckende Wege mit dem unendlich fernen Punkt, so muß entweder der eine der beiden Wege die beiden Querschnitte überschreiten oder jeder Weg überschreitet mindestens einen Querschnitt.

Bei der graphischen Darstellung werden wir uns der größeren Deutlichkeit wegen des Querschnittsystems bedienen, das in Fig. 11 dargestellt ist; der Grenzübergang, der zum kanonischen System führt, ist leicht zu übersehen.

§ 30. Über die Integrale der rationalen Funktionen der Fläche T. Es sei eine rationale Funktion F der Fläche T vorgelegt, die in den Punkten $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n$ unstetig wird.

Wir ziehen von einem Punkt der Begrenzung der Fläche

---

*) Es ist zu bemerken, daß sich die Querschnittsränder $\overset{+}{A}_1$ und $\overset{-}{A}_2$, $\overset{-}{A}_1$ und $\overset{+}{A}_2$, $\overset{+}{B}_1$ und $\overset{-}{B}_2$, $\overset{-}{B}_1$ und $\overset{+}{B}_2$ decken.

T' aus — etwa von dem Punkt aus, in dem die Schnittränder $\bar{A}$ und $\bar{B}$ zusammenstoßen — „Sperrlinien" $L_1 L_2 \ldots L_n$ nach den Unstetigkeitspunkten $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n$. Diese Sperrlinien müssen innerhalb der Fläche T' verlaufen; sie dürfen einander nicht schneiden und sich nicht selbst überkreuzen; im übrigen dürfen sie beliebig gewählt werden (s. Fig. 13).

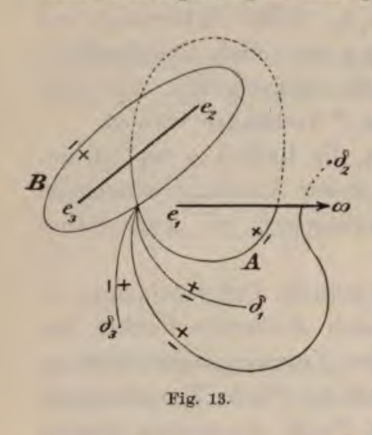


Fig. 13.

Bei jeder Sperrlinie unterscheiden wir einen + Rand und einen — Rand der Art, daß ein positiver Umlauf um ihren Endpunkt vom — Rand auf den + Rand führt. Wenn der unendlich ferne Punkt zu den Unstetigkeitspunkten der Funktion F gehört, muß selbstverständlich auch nach diesem Punkt eine Sperrlinie gezogen werden.

Die mit den Schnitten $ABL_1 L_2 \ldots L_n$ versehene Fläche bezeichnen wir mit T''. Sie ist einfach zusammenhängend. Im Innern derselben ist die Funktion F überall stetig.

Wir ziehen nun nur solche Integrationswege in Betracht, die innerhalb der Fläche T'' verlaufen. Unter dieser Voraussetzung hängt das Integral

$$I = \int F dx \tag{1}$$

nur von den Integrationsgrenzen ab, ist aber im übrigen vom Integrationsweg unabhängig. Halten wir die untere Integrationsgrenze fest, so ist I eine einwertige Funktion der oberen Integrationsgrenze.

In Punkten, die sich auf dem + Rand und dem — Rand eines Stücks der Begrenzung der Fläche T'' gegenüberliegen, nimmt das Integral I, allgemein zu reden, verschiedene Werte an; wir unterscheiden diese Werte durch die Bezeichnung $\overset{+}{I}$ und $\overset{-}{I}$.

Die Differenz $\overset{+}{I} - \overset{-}{I}$ ist längs eines jeden Stücks der Begrenzung der Fläche T'' konstant.

Zum Beweise bezeichnen wir mit $\overset{+}{\alpha}$, $\overset{-}{\alpha}$ und $\overset{+}{\beta}$, $\overset{-}{\beta}$ zwei dem-

selben Begrenzungsstück angehörende Paare einander gegenüberliegender Punkte. Nun ist

$$(2)\qquad I(\overset{+}{\beta}) - I(\overset{+}{\alpha}) = \int \overset{+}{F} dx$$

$$(3)\qquad I(\bar{\beta}) - I(\bar{\alpha}) = \int \bar{F} dx.$$

Auf der rechten Seite der Gleichung (2) ist über den $+$ Rand, auf der rechten Seite von (3) ist über den $-$ Rand des in Rede stehenden Begrenzungsstücks zu integrieren. Weil die Funktion F auch in der unzerschnittenen Fläche T einwertig ist, haben die beiden Integrale denselben Wert und daraus folgt

$$I(\overset{+}{\beta}) - I(\bar{\beta}) = I(\overset{+}{\alpha}) - I(\bar{\alpha}) = \overset{+}{I} - \bar{I} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Die konstante Differenz $\overset{+}{I} - \bar{I}$ bezeichnet man als Periodizitätsmodul des Integrals I.

Der längs der Sperrlinie L_ν stattfindende Periodizitätsmodul ist gleich dem Produkt von $2\pi i$ in das Residuum $R(\delta_\nu)$ der Funktion für den Unstetigkeitspunkt δ_ν, wie sich sofort aus der Definition des Residuums ergibt (vgl. § 27).

Wenn das Residuum $R(\delta_\nu)$ verschwindet, ist somit die Sperrlinie L_ν nicht erforderlich, um das Integral eindeutig zu machen, und kann deswegen weggelassen werden.

Der längs des Querschnitts A stattfindende Periodizitätsmodul ist gleich dem Integral

$$(4)\qquad \mathfrak{A} = \int F dx,$$

erstreckt über den Querschnitt B und zwar in dem Sinn, daß man vom $-$ Rand des Querschnittes A zum $+$ Rand gelangt.

Dementsprechend ist der Periodizitätsmodul längs des Querschnitts B gleich dem über den Querschnitt A von $\bar{B}$ nach $\overset{+}{B}$ hin erstreckten Integral

$$(5)\qquad \mathfrak{B} = \int F dx.$$

Bezeichnen wir mit $I(o)$ den Wert, den das Integral (1) erreicht, wenn die Ingration von einem festen Punkt γ aus über einen in der Fläche T'' verlaufenden Weg bis zum Punkt o erstreckt wird. Wie oben nachgewiesen worden ist, ist $I(o)$ eine *einwertige* Funktion des Orts in der Fläche T''.

Wir wollen nun feststellen, welche Änderungen der Integralwert erfährt, wenn die Integration über einen Weg L erstreckt wird, der die Begrenzung der Fläche T'' überschreitet.

Nehmen wir an, das Stück $\alpha\beta$ des Weges L überschreite ein bestimmtes Stück der Begrenzung von der — Seite zur + Seite hin. Die Punkte, in denen L die Ränder desselben trifft, bezeichnen wir mit $\overset{-}{p}$, beziehungsweise $\overset{+}{p}$.

Weil die Funktion F auch in der unzerschnittenen Fläche T einwertig ist, ist

$$\int \left| \overset{\beta}{\underset{\alpha}{L}} \right| F\,dx = \int \left| \overset{\overset{-}{p}}{\underset{\alpha}{L}} \right| F\,dx + \int \left| \overset{\beta}{\underset{\overset{+}{p}}{L}} \right| F\,dx$$

$$= I(\overset{-}{p}) - I(\alpha) + I(\beta) - I(\overset{+}{p}) = I(\beta) - I(\alpha) - $$

$$- [I(\overset{+}{p}) - I(\overset{-}{p})].$$

Die Überschreitung des Begrenzungsstücks in der Richtung von der — Seite zur + Seite hin bewirkt also eine Verminderung des Integralwertes um den betreffenden Periodizitätsmodul.

Nehmen wir nun an, der Weg L überschreite den Querschnitt A a-mal von der — Seite zur + Seite und a'-mal in der umgekehrten Richtung; die entsprechenden Zahlen für den Querschnitt B und die Sperrlinien L_ν seien b, b' beziehungsweise c_ν, c_ν'. Unter dieser Annahme ist

$$\int \left| \overset{o}{\underset{\gamma}{L}} \right| F\,dx = I(o) + (a' - a)\mathfrak{A} + (b' - b)\mathfrak{B} +$$

$$+ 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} (c_\nu' - c_\nu) R(\delta_\nu).$$

Die Funktion F ist im Innern der Fläche T', die durch die Querschnitte A und B begrenzt, aber nicht mit den Sperrlinien $L_1 L_2 \ldots L_n$ versehen ist, zwar einwertig aber nicht überall stetig. Zufolge des Residuensatzes (§ 28) ist das im positiven Sinn über die Begrenzung der Fläche T' erstreckte Integral (1) gleich dem Produkt von $2\pi i$ in die Summe der

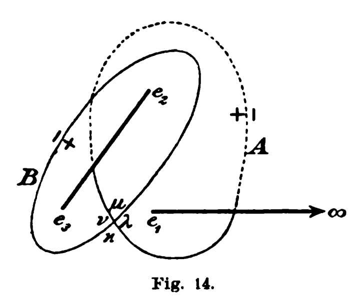


Fig. 14.

Residuen $R(\delta_\nu)$, die zu den Unstetigkeitspunkten gehören. Das in Rede stehende Integral ist die Summe der vier Integrale (s. Fig. 14)

$$\int \left|\overset{\mu}{\underset{\lambda}{\overset{+}{A}}}\right| F\,dx + \int \left|\overset{\nu}{\underset{\mu}{\overset{+}{B}}}\right| F\,dx + \int \left|\overset{\varkappa}{\underset{\nu}{\overset{-}{A}}}\right| F\,dx + \int \left|\overset{\lambda}{\underset{\varkappa}{\overset{-}{B}}}\right| F\,dx.$$

Weil die Funktion F zu beiden Seiten der Querschnitte A und B dieselben Werte besitzt, ist das erste Integral dem dritten und das zweite dem vierten entgegengesetzt gleich, die Summe ist Null. Daraus folgt:

Die Summe der Residur einer rationalen Funktion der Fläche T ist Null.

Wenn die Funktion nur in einem Punkt der Fläche unstetig wird, so ist das zugehörige Residuum Null. Hieraus ergibt sich ein neuer Beweis des Satzes, daß es keine rationale Funktion der Fläche T gibt, die nur in einem Punkt zur ersten Ordnung unendlich wird (vgl. § 25).

Wendet man den eben bewiesenen Satz auf die logarithmische Derivierte der Funktion F an, so erhält man mit Rücksicht auf die am Schluß des § 27 gemachte Bemerkung einen neuen Beweis des Satzes, daß eine rationale Funktion der Fläche T gleichviel einfache Nullpunkte und Pole besitzt (vgl. § 25).

§ 31. Die drei Gattungen von Elementarintegralen.

Im § 26 haben wir die rationalen Funktionen der Fläche T in Partialbrüche zerfällt. Von dieser Zerfällung wollen wir nun Gebrauch machen, um das Integral

$$J = \int F\,dx$$

auf einfachere Integrale zurückzuführen.

Das Integral J bleibt stetig, solange das Produkt

$$\Phi = s \cdot F$$

stetig bleibt (§ 27); wir zerlegen deshalb nicht die Funktion F selbst, sondern die Funktion Φ in Partialbrüche. Entsprechend den fünf Typen von Funktionen, die bei dieser Zerlegung auftreten können (§ 26, Schluß), erhalten wir die folgenden fünf Typen von Integralen:

(1) $\int \varphi(o/\delta)\,\frac{dx}{s} = \int \frac{s+\alpha}{2(x-a)}\,\frac{dx}{s}.$

(2) $\int \varphi_2(o/\delta)\,\frac{dx}{s} = \int \frac{\alpha\frac{d\alpha}{da}(x-a)+\alpha(s+\alpha)}{2(x-a)^2}\,\frac{dx}{s}.$

(3) $\int \varphi_m(o/\delta)\,\frac{dx}{s} = -\frac{1}{m-1}\,\varphi_{m-1}(o/\delta) + \text{Konst.} \quad m=3,4,5\ldots$

(4) $\int \psi_2(o)\,\frac{dx}{s} = \int \frac{x\,dx}{s}.$

(5) $\int \psi_m(o)\,\frac{dx}{s} = \frac{1}{m-1}\,\psi_{m-1}(o) + \text{Konst.} \qquad m = 3, 4, 5.$

Der additiven Konstanten, die bei der Zerlegung der Funktion F noch auftreten kann, entspricht das Integral

(6) $$\int \frac{dx}{s}.$$

Da in den Fällen (3) und (5) die Integration ausgeführt werden kann, erhalten wir nur vier Typen von Elementarintegralen.

Man bezeichnet das Integral (6) als Integral erster Gattung, die Integrale (2) und (4) als Integrale zweiter Gattung, das Integral (1) als Integral dritter Gattung.

Wir haben die Reduktion des allgemeinen Integrals auf die drei Gattungen von Elementarintegralen schon im § 2 mit elementaren Hilfsmitteln durchgeführt; die Entwicklungen des zweiten Abschnitts lassen den tiefer liegenden Grund, auf dem die Reduktion beruht, erkennen und eröffnen den Weg zu einer eingehenden Untersuchung der neuen Transzendenten.

§ 32. Das Normalintegral erster Gattung. Das Integral erster Gattung

$$\int \frac{dx}{s}$$

ist in der ganzen Fläche T' einwertig und nirgends unstetig.

Denn das Produkt des Integranden mit der Funktion s ist $= 1$ (s. § 27).

Für die Umgebung des unendlich fernen Punktes gilt die Reihenentwicklung

$$(1) \qquad \frac{1}{s} = \frac{1}{2(\sqrt{x})^3 \sqrt{1 - \frac{g_2}{4x^2} - \frac{g^3}{4x^3}}}$$

$$= \frac{1}{2(\sqrt{x})^3} + \frac{g_2}{16(\sqrt{x})^7} + \frac{g_3}{16(\sqrt{x})^9} \cdots\cdots$$

Hieraus folgt

$$(2) \qquad \int \frac{dx}{s} = -\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{g_2}{40}\frac{1}{(\sqrt{x})^5} - \frac{g_3}{56}\frac{1}{(\sqrt{x})^7} \cdots + \text{Konst.}$$

Wir ändern das Vorzeichen des Integrals und setzen die Integrationskonstante gleich Null. Das so normierte Integral nennen wir „Normalintegral erster Gattung“ und bezeichnen es mit $u(o)$ (vgl. § 13). Es ist demnach

$$(3) \qquad u(o) = \int_o^\infty \frac{dx}{s}.$$

Der Integrationsweg ist auf die Fläche T' beschränkt.

Für die Umgebung des Punktes e_1 gilt die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{2\sqrt{x - e_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) + 3e_1(x - e_1) + (x - e_1)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}}\left[\frac{1}{2\sqrt{x - e_1}} - \frac{3}{4}\frac{e_1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}\sqrt{x - e_1} \ldots\right].$$

Hieraus folgt

$$(4) \qquad u(o) - u(e_1) = \int_o^{e_1} \frac{dx}{s}$$

$$= -\frac{\sqrt{x - e_1}}{\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}} + \frac{1}{2}\frac{e_1(\sqrt{x - e_1})^3}{(\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)})^3} \cdots\cdots$$

Analoge Entwicklungen gelten für die Verzweigungspunkte e_2 und e_3. Im Verzweigungspunkt e_ν wird somit die Differenz

$$u(o) - u(e_\nu)$$

zur ersten Ordnung Null. Im unendlich fernen Verzweigungspunkt wird das Integral $u(o)$ selbst zur ersten Ordnung Null (2)

Die Funktion s nimmt in zwei sich deckenden Punkten $o_1\ o_2$ der Fläche T entgegengesetzte Werte an. Folglich ist

$$du(o_1) + du(o_2) = 0,$$

wenn die Punkte o_1 und o_2 auf sich deckenden Wegen fortrücken.

Vorausgesetzt, daß wir das kanonische Querschnittsystem zu Grunde legen, können wir jedes Paar sich deckender Punkte, das einen angebbaren Abstand von jedem der Verzweigungspunkte e_ν besitzt, durch sich deckende Wege mit dem unendlich fernen Punkt verbinden (§ 29, Schluß). Da in diesem Punkt das Normalintegral verschwindet, so ist die Summe

$$u(o_1) + u(o_2) = 0$$

in der ganzen Fläche T', nur in unendlicher Nähe der Verzweigungspunkte e_ν tritt eine Ausnahme ein. Wir können also sagen:

Das Normalintegral $u(o)$ nimmt in sich deckenden Punkten der Fläche T entgegengesetzte Werte an.

Die Ausnahmestellung der Verzweigungspunkte e_ν entspricht der Tatsache, daß für sie der Begriff sich deckender Punkte seine Bedeutung verliert.

Das Integral erster Gattung ist durch seine Eigenschaft, in der Fläche T' einwertig und überall stetig zu sein, im wesentlichen bestimmt.

Jede in der Fläche T' einwertige und überall stetige Funktion, die an den Querschnitten A und B konstante Periodizitätsmoduln besitzt, ist eine lineare Funktion des Normalintegrals erster Gattung.

Wir bezeichnen deshalb eine derartige Funktion als allgemeines Integral erster Gattung.

Zum Beweis ist zu bemerken: wenn eine Funktion I in der Fläche T' einwertig ist und an den Querschnitten konstante Periodizitätsmoduln besitzt, so ist ihre Derivierte I' in der unzerschnittenen Fläche T einwertig. Aus der Stetigkeit der Funktion I folgt, daß das Produkt $s \cdot I'$ nirgends unstetig ist. Dieses Produkt ist daher eine Konstante (§ 25, Schluß).

§ 33. Das Normalintegral zweiter Gattung. Das Integral zweiter Gattung (§ 31, Nr. 2)

$$(1) \qquad \int \varphi_2(o/\delta)\,\frac{dx}{s} = \int \frac{\alpha \frac{d\alpha}{da}(x-a) + \alpha(s+\alpha)}{2(x-a)^2}\,\frac{dx}{s}$$

kann nur im Punkt $\delta(x = a,\ s = \alpha)$ unstetig werden. Denn von diesem Punkt abgesehen ist das Produkt der Funktion s in den Integranden, nämlich die Funktion $\varphi_2(o/\delta)$, überall stetig.

Für die Umgebung des Punktes δ gelten die Reihenentwicklungen (§ 26, Nr. 11)

$$\varphi_2(o/\delta) = \frac{\alpha^2}{(x-a)^2} + \frac{\alpha \frac{d\alpha}{da}}{x-a} + \frac{1}{4}\alpha\frac{d^2\alpha}{da^2} + \cdots$$

und

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{d\alpha}{da}\cdot(x-a) + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\alpha^3}\left(\frac{d\alpha}{da}\right)^2 - \frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2\alpha}{da^2}\right](x-a)^2 + \cdots$$

Hieraus folgt

$$\frac{\varphi_2(o/\delta)}{s} = \frac{\alpha}{(x-a)^2} - \frac{1}{4}\frac{d^2\alpha}{da^2} + \cdots$$

und weiter

$$(2) \quad \int \frac{\varphi_2(o/\delta)}{s}\,dx = -\frac{\alpha}{x-a} - \frac{1}{4}\frac{d^2\alpha}{da^2}(x-a) + \cdots + \text{Konst.}$$

Das Residuum, das zum Punkt δ gehört, verschwindet also, folglich ist das Integral in der Fläche T' einwertig, und es ist nicht nötig eine Sperrlinie einzuführen (vgl. § 30).

Das Integral zweiter Gattung (1) ist in der Fläche T' einwertig und vom Punkt δ abgesehen überall stetig; in diesem Punkt wird das Integral zur ersten Ordnung unendlich.

Das Integral zweiter Gattung (§ 31, Nr, 4)

$$(3) \qquad \int \frac{x\,dx}{s}$$

wird nur im unendlich fernen Punkt unstetig. Für die Umgebung dieses Punktes gilt die Reihenentwicklung (§ 32, Nr. 1)

$$\frac{x}{s} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{g_2}{16(\sqrt{x})^5} + \frac{g_3}{16(\sqrt{x})^7} + \cdots$$

Hieraus folgt

$$(4) \quad \int \frac{x\,dx}{s} = \sqrt{x} - \frac{g_2}{24(\sqrt{x})^3} - \frac{g_3}{40(\sqrt{x})^5} \cdots + \text{Konst.}$$

Das zum unendlich fernen Punkt gehörige Residuum verschwindet.

Das Integral ist also in der ganzen Fläche T' einwertig

und wird nur im unendlich fernen Punkt unstetig, und zwar unendlich zur ersten Ordnung.

Unter der Voraussetzung, daß die Integrationskonstante $= 0$ gesetzt wird, setzen wir

$$\int \frac{x\,dx}{s} = \zeta(o) \tag{5}$$

und bezeichnen dieses Integral als „Normalintegral zweiter Gattung".

Die Größe s nimmt in sich deckenden Punkten o_1, o_2 der Fläche T entgegengesetzte Werte an, folglich ist

$$d\zeta(o_1) + d\zeta(o_2) = 0,$$

wenn die Punkte o_1, o_2 auf sich deckenden Wegen fortrücken.

Aus der Reihenentwicklung (4) ergibt sich, daß in der Umgebung des unendlich fernen Punktes

$$\zeta(o_1) + \zeta(o_2) = 0 \tag{6}$$

ist, da wir ja die Integrationskonstante $= 0$ gesetzt haben.

Daraus folgt: wenn wir die Fläche T' durch das kanonische Querschnittsystem begrenzen (§ 29, Schluß), so gilt die Gleichung (6) für die ganze Fläche T' mit Ausnahme der Verzweigungspunkte.

Das Integral (1) läßt sich leicht auf das Normalintegral $\zeta(o)$ zurückführen. Zu dem Zweck bemerken wir: die Differenz

$$U(o) = \int \varphi_2(o/\delta)\frac{dx}{s} + \varphi(o/\delta) - \zeta(o)$$

wird in der Fläche T' nirgends unstetig, denn im unendlich fernen Punkt bleibt die Differenz

$$\varphi(o/\delta) - \zeta(o)$$

stetig (vgl. Nr. 4 und § 26, Nr. 4) und im Punkt δ bleibt die Summe

$$\int \varphi_2(o/\delta)\frac{dx}{s} + \varphi(o/\delta)$$

stetig (vgl. Nr. 2 und § 26, Nr. 3). Folglich ist $U(o)$ ein Integral erster Gattung. Man verifiziert leicht, daß

$$U(o) = -a\,u(o) + \text{Konst. ist.}$$

Wenn wir das Integral (1) mit einer Konstanten multiplizieren und ein allgemeines Integral erster Gattung addieren, so erhalten wir eine Funktion, der ebenfalls die charakteristischen Eigenschaften des Integrals zweiter Gattung zukommen:

Die Funktion ist in der Fläche T' einwertig und wird nur in einem Punkt unstetig und zwar unendlich zur ersten Ordnung. An den Querschnitten A, B besitzt sie konstante Periodizitätsmoduln.

Wir bezeichnen eine Funktion, die diese Eigenschaften besitzt, als allgemeines Integral zweiter Gattung. Es läßt sich leicht beweisen, daß jede derartige Funktion sich aus einem Normalintegral zweiter Gattung, einem Normalintegral erster Gattung und einer rationalen Funktion $\varphi(o/\delta)$ zusammensetzen läßt.

§ 34. Das Normalintegral dritter Gattung. Um das Integral dritter Gattung

$$(1) \qquad \int \varphi(o/\delta)\frac{dx}{s} = \int \frac{s+\alpha}{2(x-a)}\frac{dx}{s}$$

eindeutig zu machen, ziehen wir von dem Punkt aus, in dem die — Ränder der Querschnitte A und B zusammenstoßen, eine Sperrlinie L nach dem Punkt δ und eine Sperrlinie L' nach dem unendlich fernen Punkt (Fig. 15). In der mit diesen Einschnitten versehenen Fläche T'' ist das Integral einwertig.

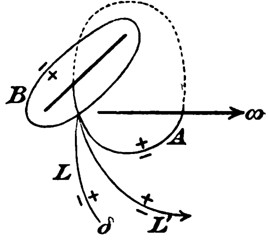


Fig. 15.

Für die Umgebung des Punktes δ gelten die Reihenentwicklungen (§ 26, Nr. 3)

$$\varphi(o/\delta) = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{1}{2}\frac{d\alpha}{da} + \frac{1}{4}\frac{d^2\alpha}{da^2}(x-a)\cdots$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{d\alpha}{da}(x-a) + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\alpha^3}\left(\frac{d\alpha}{da}\right)^2 - \frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2\alpha}{da^2}\right](x-a)^2\ldots$$

Hieraus folgt

$$\frac{\varphi(o/\delta)}{s} = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{2\alpha}\frac{d\alpha}{da} + \left[\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{da}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{da^2}\right](x-a)\ldots$$

und weiter

$$(2) \qquad \int \frac{\varphi(o/\delta)}{s}dx = \log(x-a) - \frac{1}{2\alpha}\frac{d\alpha}{da}(x-a)\cdots + \text{Konst.}$$

Das zum Punkt δ gehörige Residuum ist $= 2\pi i$.

Für die Umgebung des unendlich fernen Punktes gelten die Reihenentwicklungen (§ 26, Nr. 4)

$$\varphi(o/\delta) = \sqrt{x} + \frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{\alpha}{2x} + \cdots$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{2(\sqrt{x})^3} + \frac{g_2}{16}\frac{1}{(\sqrt{x})^7} + \cdots$$

$$\frac{\varphi(o/\delta)}{s} = \frac{1}{2x} + \frac{a}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{\alpha}{4}\frac{1}{(\sqrt{x})^5} + \cdots$$

Hieraus folgt

$$(3)\qquad \int \frac{\varphi(o/\delta)}{s}\,dx = \log\sqrt{x} - \frac{a}{2}\frac{1}{x} - \frac{\alpha}{6}\frac{1}{(\sqrt{x})^3}\cdots + \text{Konst.}$$

Das zum unendlich fernen Punkt gehörige Residuum ist $= -2\pi i$.

Daß die Residuen, die zum unendlich fernen Punkt und zum Punkt δ gehören, entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, ist eine Folge des in § 30 bewiesenen allgemeinen Satzes.

Wir haben bisher stillschweigend vorausgesetzt, daß der Unstetigkeitspunkt δ mit keinem der Verzweigungspunkte e_ν zusammenfällt. Wenn der Punkt δ in den Verzweigungspunkt e_1 rückt, so ist

$$\varphi(o/\delta) = \frac{s}{2(x-e_1)}$$

und hieraus folgt

$$(4)\qquad \int \frac{\varphi(o/\delta)}{s}\,dx = \log\sqrt{x-e_1} + \text{Konst.}$$

Im unendlich fernen Punkt wird das Integral nach wie vor unendlich wie $\log\sqrt{x}$. In dem Unstetigkeitspunkt δ, der im Endlichen liegt, wird es aber nicht mehr unendlich wie $\log(x-a)$, sondern wie $\log\sqrt{x-a}$. Es steht das im Einklang mit unseren allgemeinen Festsetzungen (s. § 23).

Das Integral dritter Gattung besitzt demnach längs der Sperrlinie L, die nach dem Punkt δ führt, den Periodizitätsmodul $2\pi i$, längs der nach dem unendlich fernen Punkt führenden Sperrlinie L' den Periodizitätsmodul $-2\pi i$.

Wir führen für das Integral (1) eine eigene Bezeichnung ein und setzen

$$(5)\qquad w(o/\delta) = \int \varphi(o/\delta)\frac{dx}{s} = \int \frac{s+\alpha}{2(x-a)}\frac{dx}{s}.$$

Um zu einer zweckmäßigen Bestimmung der Integrationskonstanten, die noch zur Verfügung steht, zu gelangen, gehen wir am besten von der Gleichung (2) aus. Wir setzen fest: im Punkt δ sei

$$\lim\left[w(o/\delta) - \log\left(u(o) - u(\delta)\right)\right] = 0. \tag{6}$$

Diese Bestimmung bietet den Vorteil, daß sie auch in dem Fall, daß der Punkt δ in einen der Verzweigungspunkte e_ν rückt, anwendbar bleibt. Denn der Grenzwert

$$\lim \frac{u(o) - u(e_\nu)}{\sqrt{x - e_\nu}}$$

ist endlich und von Null verschieden (§ 32, Nr. 4), wie es wegen der Gleichung (4) erforderlich ist. Durch unsere Festsetzung ist die Integrationskonstante allerdings nur bis auf ein Multiplum von $2\pi i$ bestimmt, aber für unsere Zwecke genügt dies.

Das nunmehr bis auf ein Multiplum von $2\pi i$ definierte Integral bezeichnen wir als „Normalintegral dritter Gattung".

Die Differenz zweier Normalintegrale dritter Gattung

$$W = w(o/\delta) - w(o/\varepsilon) \tag{7}$$

wird in den beliebig zu wählenden Punkten δ und ε logarithmisch unendlich, bleibt aber im unendlich fernen Punkt stetig. An den charakteristischen Eigenschaften der Funktion W wird nichts geändert, wenn wir sie mit einer beliebigen Konstanten multiplizieren und ein Integral erster Gattung addieren. Die Funktion, die wir auf diesem Wege erhalten, bezeichnen wir als allgemeines Integral dritter Gattung.

Das Integral W (7) erhält eine besonders einfache Gestalt, wenn die Unstetigkeitspunkte δ und ε sich decken. In diesem Fall ist

$$W = \int \frac{s+\alpha}{2(x-a)} \frac{dx}{s} - \int \frac{s-\alpha}{2(x-a)} \frac{dx}{s} = \int \frac{\alpha}{x-a} \frac{dx}{s}.$$

In der älteren Literatur wird dieses Integral statt des Integrals $w(o/\delta)$ als Normalintegral dritter Gattung benützt (vgl. § 2).

Da sich das Integral einer beliebigen rationalen Funktion

der Fläche T als Aggregat von rationalen Funktionen der Fläche T und Normalintegralen darstellen läßt, so lassen sich seine Periodizitätsmoduln an den Querschnitten A, B aus denen der Normalintegrale zusammensetzen.

Mit diesen haben wir uns zunächst zu beschäftigen.

§ 35. Periodizitätsmoduln des Normalintegrals erster Gattung. Die Periodizitätsmoduln des Normalintegrals erster Gattung

$$u(o) = \int_o^\infty \frac{dx}{s}$$

an den Querschnitten A, B bezeichnen wir mit $2\omega_1$, $2\omega_3$. Der Grund, warum diese Indizesbezeichnung gewählt ist, wird sofort hervortreten. Aus den allgemeinen Ausführungen des § 30 ergibt sich, daß

$$(1) \qquad 2\omega_1 = u(\lambda) - u(\varkappa) = -\int \left| \begin{matrix} \lambda \\ B \\ \varkappa \end{matrix} \right| \frac{dx}{s}$$

und

$$(2) \qquad 2\omega_3 = u(\nu) - u(\varkappa) = -\int \left| \begin{matrix} \nu \\ A \\ \varkappa \end{matrix} \right| \frac{dx}{s}$$

ist (s. die nebenstehende Figur). Die Werte dieser Integrale hängen wesentlich davon ab, in welcher Art das Querschnittsystem angelegt wird. Wir werden später (§ 39) des genaueren untersuchen, welche Änderungen die Werte der Periodizitätsmoduln erfahren, wenn das Querschnittsystem geändert wird. Zunächst gehen wir von dem in Fig. 16 dargestellten Querschnittsystem aus, das durch stetige Deformation in das kanonische Querschnittsystem übergeführt werden kann (vgl. § 29, Schluß).

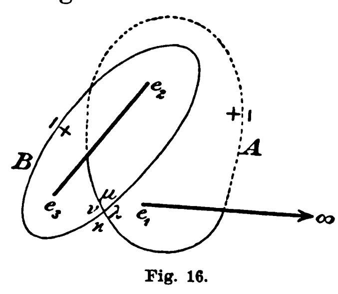


Fig. 16.

Die Integrale (1) und (2) lassen sich leicht durch die Werte ausdrücken, die das Integral $u(o)$ in den Verzweigungspunkten e_1 und e_3 annimmt. Wir können den Verzweigungspunkt e_1 mit dem unendlich fernen Punkt der Fläche T durch

einen im oberen Blatt verlaufenden Weg L_1 verbinden, der keinen Querschnitt überschreitet (s. Fig. 17). Der mit diesem Weg sich deckende Weg L_2 im unteren Blatt überkreuzt den Querschnitt A und zwar wird der Querschnitt, wenn man vom Punkt ∞ ausgeht, von der $-$Seite zur $+$Seite hin überschritten. Folglich ist (s. § 30)

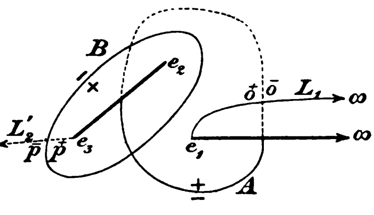


Fig. 17.

$$\int \left| \begin{matrix} e_1 \\ L_2 \\ \infty \end{matrix} \right| \frac{dx}{s} = \int \left| \begin{matrix} e_1 \\ L_1 \\ \infty \end{matrix} \right| \frac{dx}{s} + 2\omega_1 = -u(e_1) + 2\omega_1 \text{*)}.$$

Weil die Größe s in sich deckenden Punkten der Fläche T entgegengesetzte Werte besitzt, ist

$$\int \left| \begin{matrix} e_1 \\ L_2 \\ \infty \end{matrix} \right| \frac{dx}{s} = -\int \left| \begin{matrix} e_1 \\ L_1 \\ \infty \end{matrix} \right| \frac{dx}{s} = u(e_1).$$

Folglich ist

$$u(e_1) = \omega_1. \tag{3}$$

Den Verzweigungspunkt e_3 können wir durch einen im unteren Blatt verlaufenden Weg L_2', der keinen Querschnitt überschreitet, mit dem unendlich fernen Punkt verbinden (s. Fig. 17). Der mit diesem Weg sich deckende Weg L_1' im oberen Blatt überkreuzt den Querschnitt B. Die eben angewendete Schlußweise zeigt, daß

$$u(e_3) = \omega_3 \tag{4}$$

ist. Um auch den Integralwert e_2 durch die Perioden auszudrücken, verbinden wir den Punkt e_2 durch einen im unteren Blatt verlaufenden Weg L_2, der keinen Querschnitt überschreitet, mit dem unendlich fernen Punkt (Fig. 18). Der mit diesem Weg sich deckende Weg L_1 überkreuzt die beiden Querschnitte A und B und zwar wenn wir vom unendlich fernen Punkte ausgehen, von der $-$Seite zur $+$Seite hin. Folglich ist

$$u(e_2) = \omega_1 + \omega_3. \tag{5}$$

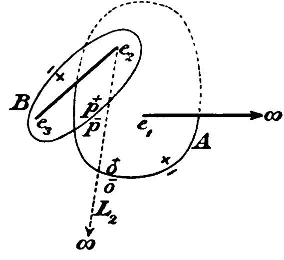


Fig. 18.

---

*) Es ist zu beachten, daß das Integral $\int\limits_{\infty}^{o} \frac{dx}{s} = -u(o)$ den Periodizitätsmodul $-2\omega_1$ besitzt.

Es ist üblich

$$\omega_1 + \omega_3 = \omega_2 \tag{6}$$

zu setzen. Bei Anwendung dieser Bezeichnung können wir die Gleichungen (3), (4) und (5) in die Formel zusammenfassen

$$u(e_\nu) = \omega_\nu \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\omega_1 = \omega_2 - \omega_3 = \int_{e_2}^{e_3} \frac{dx}{s}, \quad \omega_3 = \omega_2 - \omega_1 = \int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{s}.$$

Der Integrationsweg ist so zu wählen, daß er keinen Querschnitt überschreitet.

Um das Integral (3) auszuwerten, wählen wir als Integrationsweg den + Rand der Doppellinie $e_1 \infty$, der dem oberen Blatt angehört (s. Fig. 17) und setzen

$$x = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{t^2}. \tag{8}$$

Wenn der Punkt x, s vom Punkte e_1 aus längs der Doppellinie ins Unendliche rückt, so durchläuft die Variable t das reelle Intervall von 1 bis 0. Aus (8) folgt

$$s^2 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) = 4(e_1 - e_3)^3(1 - t^2)\left(1 - \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} t^2\right)\frac{1}{t^6}.$$

Wir machen von den früher eingeführten Bezeichnungen (§ 8)

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \tag{9}$$

Gebrauch und erhalten

$$s = 2\left(\sqrt{e_1 - e_3}\right)^3 \sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)} \cdot \frac{1}{t^3}. \tag{10}$$

Der reelle Teil der Größe

$$R = \sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)} \tag{11}$$

kann innerhalb des Integrationsintervalls nicht verschwinden Wenn nämlich die drei Punkte e_ν auf einer Geraden liegen, so ist zufolge unserer Übereinkunft (§ 21) e_2 der mittlere derselben und es ist folglich k^2 reell und < 1.

Wenn dies nicht der Fall ist, so hat k^2 einen komplexen Wert und es kann der imaginäre Teil von R^2 innerhalb des

Integrationsintervalls nicht verschwinden, folglich gilt dasselbe für den reellen Teil von R. Am Schluß des § 21 ist die Bestimmung getroffen worden, daß

$$\operatorname{arc} \frac{s}{(\sqrt{e_1 - e_3})^3}$$

gegen Null konvergiert, wenn man im oberen Blatt der Fläche T längs des + Randes der Doppellinie $e_1 \infty$ ins Unendliche geht. Folglich ist das Vorzeichen der Wurzel R so zu wählen, daß ihr reeller Teil positiv ist.

Führen wir den Wert (10) in (3) ein, so ergibt sich mit Rücksicht auf (8)

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}. \tag{12}$$

Weil der reelle Teil von R innerhalb des Integrationsintervalls positiv ist, so ist auch der reelle Teil von K von Null verschieden und positiv.

Um das Integral (4) auszuwerten, wählen wir als Integrationsweg den Vektor L_2', der im untern Blatt der Fläche T vom Punkt e_3 aus in der Richtung $e_1 e_3$ ins Unendliche läuft (s. Fig. 17). Wir setzen

$$x = e_1 - \frac{e_1 - e_3}{t^2}. \tag{13}$$

Die Integrationsvariable hat auch in diesem Fall das reelle Intervall von 1 bis 0 zu durchlaufen. Aus (13) folgt mit Rücksicht auf (9)

$$s^2 = -4(e_1 - e_3)^3(1 - t^2)(1 - k'^2t^2) \cdot \frac{1}{t^6}.$$

Man zeigt wie oben, daß der reelle Teil der Wurzel

$$R' = \sqrt{(1 - t^2)(1 - k'^2t^2)} \tag{14}$$

innerhalb des Integrationsintervalls nicht verschwinden kann. Wie am Schluß des § 21 bemerkt worden ist, gilt für den unendlich fernen Teil des Vektors L'_2 die Gleichung

$$\lim \operatorname{arc} \frac{s}{(\sqrt{e_1 - e_3})^3} = \frac{\pi}{2}.$$

Folglich ist das Vorzeichen der Wurzel R' so zu wählen, daß ihr reeller Teil positiv ist. Wir erhalten

$$s = 2i\left(\sqrt{e_1 - e_3}\right)^3 R' \cdot \frac{1}{t^3}.$$

Führen wir diesen Wert in (4) ein, so folgt mit Rücksicht auf (13)

$$\omega_3 = \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2 t^2)}} = \frac{iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}}. \tag{14}$$

Der reelle Teil der Größe K' ist jedenfalls von Null verschieden und positiv.

§ 36. Der Periodenquotient $\frac{\omega_3}{\omega_1}$. Nehmen wir an, die drei Verzweigungspunkte e_ν liegen auf einer Geraden. In diesem Fall sind die Größen k^2 und k'^2 reell und, weil wir festgesetzt haben (§ 21), unter e_2 sei der mittlere der drei Punkte zu verstehen, so sind sie positiv und < 1. Folglich sind die Integrale K und K' (Nr. 12 und 15 des vorigen Paragraphen) reell und positiv, der Quotient

$$\frac{\omega_3}{i\omega_1} = \frac{K'}{K} \tag{1}$$

ist daher reell und positiv.

Nehmen wir nunmehr an, daß die drei Verzweigungspunkte e_ν nicht auf einer Geraden liegen. Die Winkel des Dreiecks, das sie bestimmen, bezeichnen wir mit $\beta_1 \beta_2 \beta_3$. Der Arkus der Größe

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$$

ist der Winkel, um den die Seite $e_3 e_1$ im positiven Sinn gedreht werden muß, damit sie mit der Seite $e_3 e_2$ zur Deckung kommt. Dementsprechend ist der Arkus der Größe

$$k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}$$

der Winkel, um den die Seite $e_1 e_3$ im positiven Sinn gedreht werden muß, damit sie mit der Seite $e_1 e_2$ zur Deckung kommt. Wenn man bei einem positiven Umlauf um das Dreieck der

Verzweigungspunkte die Ecken in der Reihenfolge $e_1 e_2 e_3$ trifft (Fig. 19), so ist demnach der kleinste Wert von

$$\text{arc}\, k^2 = \beta_3$$

und der kleinste Wert von

$$\text{arc}\, k'^2 = -\beta_1.$$

Wenn dagegen bei einem positiven Umlauf um das Dreieck die Reihenfolge $e_1 e_3 e_2$ eintritt (Fig. 20) so ist der kleinste Wert von

Fig. 19.

$$\text{arc}\, k^2 = -\beta_3$$

und der kleinste Wert von

$$\text{arc}\, k'^2 = \beta_1.$$

Wir können also

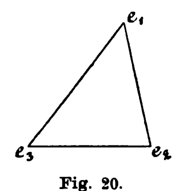


Fig. 20.

$$\text{arc}\, k^2 = \pm \beta_3, \quad \text{arc}\, k'^2 = \mp \beta_1$$

setzen. Im ersten Fall (Fig. 19) gelten die oberen Zeichen, im zweiten (Fig. 20) die unteren.

Im Integrationsintervall

$$0 \leqq t \leqq 1$$

liegt der kleinste Wert des Arkus der Größe

$$R^2 = (1 - t^2)(1 - k^2 t^2)$$

zwischen 0 und $\text{arc}\, k'^2 = \mp \beta_1$, der kleinste Wert des Arkus der Größe

$$R'^2 = (1 - t^2)(1 - k'^2 t^2)$$

zwischen 0 und $\text{arc}\, k^2 = \pm \beta_3$. Da die Vorzeichen der Wurzeln R und R' so zu wählen sind, daß die reellen Teile dieser Größen positiv sind, so liegt demnach der kleinste Wert von $\text{arc}\left(\frac{1}{R}\right)$ zwischen 0 und $\pm \frac{\beta_1}{2}$, der kleinste Wert von $\text{arc}\left(\frac{1}{R'}\right)$ zwischen 0 und $\mp \frac{\beta_3}{2}$. Daraus folgt, daß die Arkuse der Integrale

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{R} \quad \text{und} \quad K' = \int_0^1 \frac{dt}{R'}$$

ebenfalls zwischen 0 und $\pm \frac{\beta_1}{2}$ beziehungsweise 0 und $\mp \frac{\beta_3}{2}$ liegen, folglich liegt der Arkus des Quotienten $\frac{K'}{K}$ im ersten Fall (Fig.

19) zwischen 0 und $-\frac{\beta_1+\beta_3}{2}$, im zweiten Fall zwischen 0 und $\frac{\beta_1+\beta_3}{2}$.

Da

$$\frac{\beta_1+\beta_3}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta_2}{2}<\frac{\pi}{2},$$

so ist der reelle Teil des Quotienten $\frac{K'}{K}$ von Null verschieden und positiv.

Demnach ist der imaginäre Teil des Quotienten

$$\tau=\frac{\omega_3}{\omega_1}=\frac{iK'}{K}$$

von Null verschieden und positiv imaginär.

Es ist wesentlich zu bemerken, daß der eben bewiesene Satz nur unter der Voraussetzung gilt, daß bei einem positiven Umlauf um die Fläche T' die Begrenzungsstücke in der Reihenfolge $\bar{A}\bar{B}\overset{+}{A}\overset{+}{B}$ durchlaufen werden.

Wir wollen einer späteren Anwendung wegen aus den vorausgehenden Entwicklungen für den Fall eine Folgerung ziehen, daß zwar die Größen g_2 und g_3 reell aber zwei der Größen e_ν komplex sind. Wir wählen die Bezeichnung so, daß die Größe e_2 reell und die Größe e_1-e_3 positiv imaginär ist. Das Dreieck der Verzweigungspunkte ist in diesem Fall gleichschenklig, die Winkel β_1 und β_3 sind einander gleich. Je nachdem e_2 negativ oder positiv ist, liegt der erste oder der zweite der oben betrachteten Fälle vor (vgl. die nebenstehenden Figuren mit den Figuren 19 und 20). Die Größen k^2 und k'^2 sind in diesem Fall konjugiert imaginär, folglich auch die Größen R^2 und R'^2. Weil die Vorzeichen der Wurzeln R und R' so gewählt sind, daß ihre reellen Teile positiv sind, so sind auch diese beiden Größen konjugiert imaginär. Folglich haben auch die Integrale K und K' konjugiert imaginäre Werte.

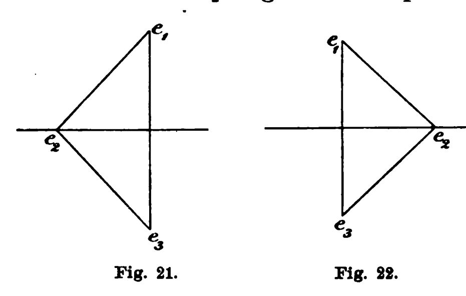


Fig. 21. Fig. 22.

Infolge der im § 21 getroffenen Bestimmung ist

$$\operatorname{arc}\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{4}$$

zu setzen. Es ist daher bis auf Multipla von 2π (§ 35, Nr. 12 und 15)

$$\operatorname{arc}\omega_1 = \operatorname{arc}K - \frac{\pi}{4}$$

und

$$\operatorname{arc}\omega_3 = \operatorname{arc}K' + \frac{\pi}{4} = -\operatorname{arc}K + \frac{\pi}{4}.$$

Demnach haben die Perioden ω_1 und ω_3 konjugiert imaginäre Werte.

Da nun, wie oben gezeigt worden ist, arc K zwischen 0 und $\frac{\beta_1}{2}$ oder zwischen 0 und $-\frac{\beta_1}{2}$ liegt, je nachdem der erste oder der zweite Fall eintritt, so liegt arc ω_1 im ersten Fall zwischen 0 und $-\frac{\pi}{4}$, im zweiten zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{2}$. Auf jeden Fall ist der reelle Teil von ω_1 positiv, der imaginäre negativ. Demnach sind die beiden Größen

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_3 \quad \text{und} \quad \frac{\omega_3 - \omega_1}{i}$$

reell und positiv. Je nachdem der erste oder der zweite Fall vorliegt, ist die erste oder die zweite die größere.

§ 37. Die Periodizitätsmoduln des Integrals zweiter Gattung. Die Periodizitätsmoduln des Normalintegrals zweiter Gattung

$$\zeta(o) = \int \frac{x\,dx}{s}$$

an den Querschnitten A und B bezeichnen wir mit $2\eta_1$ und $2\eta_3$.

Sie haben die Werte (vgl. § 30, Fig. 14)

$$2\eta_1 = \int \left|\begin{matrix}\lambda\\ B\\ \varkappa\end{matrix}\right| \frac{x\,dx}{s} \quad \text{und} \quad 2\eta_3 = \int \left|\begin{matrix}\nu\\ A\\ \varkappa\end{matrix}\right| \frac{x\,dx}{s}.$$

Im § 35 haben wir die Gleichungen bewiesen (Nr. 7)

$$u(e_\nu) = \omega_\nu, \quad \omega_2 = \omega_1 + \omega_3. \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

Für die Perioden des Normalintegrals zweiter Gattung gelten die analogen Gleichungen:

$$\zeta(e_\nu) = \eta_\nu, \quad \eta_2 = \eta_1 + \eta_3. \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{1}$$

Der im § 35 geführte Beweis bedarf nur einer geringen Modifikation, um auf den vorliegenden Fall anwendbar zu werden. Wir haben bei diesem Beweis davon Gebrauch gemacht, daß das Integral erster Gattung $u(o)$ gegen Null konvergiert, wenn der Punkt o ins Unendliche rückt. Dem Integral $\zeta(o)$ kommt diese Eigenschaft nicht zu, es wird vielmehr im unendlich fernen Punkt unendlich, aber in der Umgebung dieses Punktes ist wenigstens die Summe

$$\zeta(o_1) + \zeta(o_2) = 0 \quad (\S\ 33,\ \text{Nr. } 6)$$

und dies genügt für unsern Beweis.

Aus den Gleichungen (1) folgt

$$\eta_1 = \eta_2 - \eta_3 = \int_{e_3}^{e_2} \frac{x\,dx}{s}, \qquad \eta_3 = \eta_2 - \eta_1 = \int_{e_1}^{e_2} \frac{x\,dx}{s}.$$

Zwischen den vier Halbperioden $\omega_1, \omega_3, \eta_1, \eta_3$ besteht eine einfache Beziehung. Um sie abzuleiten, bilden wir das Integral

$$I = \int u(o)\,d\zeta(o)$$

und erstrecken die Integration im positiven Sinn über die vollständige Begrenzung der Fläche T'. Wir erhalten (vgl. § 30, Fig. 14)

$$I = \int \left|\overset{\mu}{\underset{\lambda}{\overset{+}{A}}}\right| u\,d\zeta + \int \left|\overset{\nu}{\underset{\mu}{\overset{+}{B}}}\right| u\,d\zeta + \int \left|\overset{\varkappa}{\underset{\nu}{\overset{-}{A}}}\right| u\,d\zeta + \int \left|\overset{\lambda}{\underset{\varkappa}{\overset{-}{B}}}\right| u\,d\zeta.$$

Das Differential

$$d\zeta = \frac{dx}{s}$$

ist auch in der unzerschnittenen Fläche T einwertig, dagegen ist längs des Querschnitts A

$$\overset{+}{u} - \overset{-}{u} = 2\omega_1,$$

längs des Querschnitts B

$$\overset{+}{u} - \overset{-}{u} = 2\omega_3.$$

Folglich ist

$$I = \int \left|\overset{\lambda}{\underset{\varkappa}{\overset{-}{B}}}\right| (-2\omega_3)\,d\zeta + \int \left|\overset{\nu}{\underset{\varkappa}{\overset{-}{A}}}\right| 2\omega_1\,d\zeta$$

also

$$I = 4(\omega_1\eta_3 - \omega_3\eta_1). \tag{2}$$

Andererseits ist das Integral I gleich $2\pi i$-mal der Summe der Residuen, die den Unstetigkeitspunkten des Integranden

$$I' = u(o)\zeta'(o)$$

entsprechen. Im Endlichen bleibt das Produkt $s \cdot I'$ überall stetig, folglich gehört zu keinem Punkt im Endlichen ein Residuum. Im Unendlichen wird jede der beiden Funktionen $u(o)$ und $\zeta'(o)$ zur ersten Ordnung Null und zwar ist

$$\lim \sqrt{x}\, u(o) = 1 \quad \text{und} \quad \lim \sqrt{x}\, \zeta'(o) = \tfrac{1}{2},$$

also

$$\lim x I' = \tfrac{1}{2}.$$

Der Koeffizient von $\frac{1}{x}$ in der Reihenentwicklung der Funktion I' nach absteigenden Potenzen von x ist also $= \frac{1}{2}$, das zugehörige Residuum folglich $= -1$ (§ 27). Demnach ist

$$I = -2\pi i.$$

Der Vergleich mit (2) ergibt

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \frac{\pi i}{2}. \tag{3}$$

Man bezeichnet diese Gleichung als Legendresche Relation.

An den charakteristischen Eigenschaften des Normalintegrals zweiter Gattung wird nichts geändert, wenn wir zu ihm das mit einer beliebigen Konstanten multiplizierte Normalintegral erster Gattung addieren. Über die Konstante können wir derart verfügen, daß der Periodizitätsmodul am Querschnitt A verschwindet. Wir setzen

$$Z(o) = \zeta(o) - \frac{\eta_1}{\omega_1} u(o). \tag{4}$$

Der Periodizitätsmodul des Integrals $Z(o)$ am Querschnitt A ist — wie gefordert ist — $= 0$, der Periodizitätsmodul am Querschnitt B hat den Wert

$$2\eta_3 - \frac{\eta_1}{\omega_1} \cdot 2\omega_3 = -\frac{\pi i}{\omega_1} \quad \text{s. (3)}$$

Da im unendlich fernen Punkt das Normalintegral $u(o)$ verschwindet, so gilt auch für das Integral $Z(o)$ im unendlich fernen Punkt die Gleichung

$$\lim \left[Z(o) - \sqrt{x}\right] = 0.$$

Wir bezeichnen auch das Integral $Z(o)$ als „Normalintegral zweiter Gattung.“ Um es von dem Integral $\zeta(o)$ zu unterscheiden, bezeichnen wir $\zeta(o)$ als „algebraisch normiert“, $Z(o)$ als „transzendent normiert“.

§ 38. Die Perioden des Normalintegrals dritter Gattung. Die Perioden des Normalintegrals dritter Gattung

$$w(o/\delta) = \int \frac{s+\alpha}{2(x-a)} \frac{dx}{s}$$

an den Querschnitten A und B bezeichnen wir mit $2\xi_1$ und $2\xi_3$. Um sie zu berechnen, bilden wir die beiden Integrale

$$I = \int u(o) dw(o/\delta) \tag{1}$$

und

$$J = \int \zeta(o) dw(o/\delta). \tag{2}$$

Die Integration erstrecken wir im positiven Sinn über die vollständige Begrenzung der Fläche T'. Innerhalb dieser Fläche sind die beiden Integranden I' und J' einwertig. Wir erhalten (vgl. die entsprechende Rechnung im vorigen Paragraphen):

$$I = 4(\omega_1 \xi_3 - \omega_3 \xi_1), \tag{3}$$

$$J = 4(\eta_1 \xi_3 - \eta_3 \xi_1). \tag{4}$$

Wir berechnen nun die Integrale I und J mittels der Residuen.

Der Integrand

$$I' = u(o) w'(o/\delta)$$

wird im Endlichen unstetig in den Verzweigungspunkten e_ν, in diesen bleibt aber das Integral stetig und zweitens im Punkt $\delta(x = a,\ s = \alpha)$. In diesem Punkt wird

$$w'(o/\delta) = \frac{s+\alpha}{2(x-a)} \cdot \frac{1}{s}$$

zur ersten Ordnung unendlich und es ist

$$\lim\ (x-a) I' = u(\delta).$$

Dem Punkt δ entspricht also das Residuum $u(\delta)$.

Im Unendlichen wird $u(o)$ Null zur ersten Ordnung und $w'(o/\delta)$ wird Null zur zweiten Ordnung, der Integrand I' wird also Null zur dritten Ordnung, folglich bleibt das Integral im Unendlichen stetig (§ 27). Somit ist

$$I = 2\pi i u(\delta).$$

Der Vergleich mit (3) ergibt

$$\omega_1 \xi_3 - \omega_3 \xi_1 = \frac{\pi i}{2} u(\delta). \tag{5}$$

Der Integrand

$$J' = \zeta(o) w'(o/\delta)$$

wird im Endlichen unstetig erstens in den Verzweigungspunkten, aber in diesen bleibt das Integral stetig und zweitens im Punkt δ. Diesem Punkt entspricht das Residuum $\zeta(\delta)$. Für die Umgebung des unendlich fernen Punktes gelten die Reihenentwicklungen (§ 33, Nr. 4 und § 34, Nr. 3)

$$\zeta(o) = \sqrt{x} - \frac{g_2}{24(\sqrt{x})^3} \cdots$$

$$w'(o/\delta) = \frac{1}{2x} + \frac{a}{2x^2} + \frac{\alpha}{4(\sqrt{x})^5} \cdots$$

In der Reihenentwicklung des Integranden J' nach absteigenden Potenzen von $\sqrt{x}$ kommt somit kein in $\frac{1}{x}$ multipliziertes Glied vor. Folglich ist das entsprechende Residuum gleich Null. Demnach ist

$$J = 2\pi i \zeta(\delta).$$

Der Vergleich mit (4) ergibt

$$\eta_1 \xi_3 - \eta_3 \xi_1 = \frac{\pi i}{2} \zeta(\delta). \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt mit Rücksicht auf die Legendresche Relation (Gleichung (3) des vorigen Paragraphen):

$$\begin{cases} \xi_1 = \omega_1 \zeta(\delta) - \eta_1 u(\delta), \\ \xi_3 = \omega_3 \zeta(\delta) - \eta_3 u(\delta). \end{cases} \tag{7}$$

Außer den Periodizitätsmoduln an den Querschnitten A, B besitzt das Normalintegral $w(o/\delta)$ noch zwei weitere an den Sperrlinien L und L', die von einem Punkt der Begrenzung

der Fläche T' aus nach dem Punkt δ und dem unendlich fernen Punkt hinführen (§ 34).

Längs der nach dem Punkt δ führenden Sperrlinie L ist $\overset{+}{w} - \overset{-}{w} = 2\pi i$, längs der nach dem unendlich fernen Punkt führenden Sperrlinie L' ist

$$\overset{+}{w} - \overset{-}{w} = -2\pi i.$$

Das Integral

$$W(o/\delta) = w(o/\delta) - \frac{\xi_1}{\omega_1}[u(o) - u(\delta)] \tag{8}$$

besitzt dieselben Unstetigkeiten wie das Integral $w(o/\delta)$. An den Sperrlinien L und L' besitzen beide Integrale dieselben Periodizitätsmoduln.

Am Querschnitt A besitzt $W(o/\delta)$ den Periodizitätsmodul Null; sein Periodizitätsmodul am Querschnitt B hat den Wert (5)

$$2\xi_3 - \frac{\xi_1}{\omega_1} \cdot 2\omega_3 = \frac{\pi i}{\omega_1} u(\delta).$$

Wir haben die Bestimmung getroffen, daß im Punkt δ

$$\lim\,[w(o/\delta) - \log(u(o) - u(\delta))] = 0$$

ist (§ 34), folglich ist auch (8)

$$\lim\,[W(o/\delta) - \log(u(o) - u(\delta))] = 0. \tag{9}$$

Wir bezeichnen — im Einklang mit der für die Integrale zweiter Gattung aufgestellten Definition — das Integral $w(o/\delta)$ als „algebraisch normiertes" Integral dritter Gattung, das Integral $W(o/\delta)$ als „transzendent normiertes".

§ 39. Änderung des Querschnittsystems. Im § 32 haben wir bereits darauf hingewiesen, daß sich die Werte der Periodizitätsmoduln ändern, wenn das Querschnittsystem geändert wird. Wir wollen dies nun genauer untersuchen. Dabei beziehen wir uns auf die Periodizitätsmoduln des Normalintegrals erster Gattung; unsere Betrachtungen gelten aber auch für die Periodizitätsmoduln der algebraisch normierten Integrale zweiter und dritter Gattung.

Wir haben bisher vorausgesetzt, die Bezeichnung sei so gewählt, daß man bei einem positiven Umlauf um die Fläche T'

vom $-$Rand des ersten Querschnitts auf den $-$Rand des zweiten und vom $+$Rand des ersten auf den $+$Rand des zweiten gelangt. Diese Voraussetzung ist für die in den vorausgehenden Paragraphen bewiesenen Sätze, insbesondere für den Satz des § 36 über den Periodenquotienten wesentlich. Wir halten an ihr auch im folgenden fest, ziehen also nur solche Änderungen des Querschnittsystems in Betracht, bei denen sie in Geltung bleibt.

Wir bezeichnen mit A', B' ein zweites Paar von Querschnitten, durch die die Fläche T in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt wird, mit $2\omega_1'$, $2\omega_3'$ die Periodizitätsmoduln des Normalintegrals erster Gattung an denselben.

Zunächst lassen wir den Querschnitt A' mit dem Querschnitt A, den Querschnitt B' mit dem Querschnitt B zusammenfallen, ändern aber die Bezeichnung der Ränder. Wenn wir den $+$Rand von A' mit dem $-$Rand von A und den $-$Rand von A' mit dem $+$Rand von A zusammenfallen lassen, so müssen wir auch den $+$Rand von B' mit dem $-$Rand von B und den $-$Rand von B' mit dem $+$Rand von B zusammenfallen lassen, damit sich bei einem positiven Umlauf von der Fläche T' die Reihenfolge $\overset{+}{A'}$, $\overset{+}{B'}$, $\overset{-}{A'}$, $\overset{-}{B'}$ ergibt. Zwischen den Perioden $2\omega_\nu$ und $2\omega_\nu'$ bestehen die Beziehungen

$$(1) \qquad \omega_1' = -\omega_1, \qquad \omega_3' = -\omega_3.$$

Wir können noch eine zweite Änderung der Bezeichnung vornehmen: wir lassen den Querschnitt A' mit dem Querschnitt B und B' mit A zusammenfallen. Wenn der $+$Rand von A' mit dem $+$Rand von B zusammenfällt, so muß der $+$Rand von B' mit dem $-$Rand von A zusammenfallen, damit bei einem positiven Umlauf um die Fläche T' die festgesetzte Reihenfolge stattfindet. Zwischen den ursprünglichen und den neuen Perioden bestehen die Gleichungen

$$(2) \qquad \omega_1' = \omega_3, \qquad \omega_3' = -\omega_1.$$

Indem wir die zuerst besprochene Änderung des Querschnittsystems mit der zweiten kombinieren, können wir bewirken, daß der $+$Rand von A' mit dem $-$Rand von B und

der + Rand von B' mit dem + Rand von A zusammenfällt. Für diesen Fall gelten die Gleichungen

$$\omega_1' = -\omega_3, \qquad \omega_3' = \omega_1.$$

Wir haben bisher die Gestalt des Querschnittsystems ungeändert gelassen und nur die Bezeichnung der einzelnen Teile geändert; wir wollen nun auch die Gestalt verändern. Da ist zunächst zu bemerken: zwei Querschnittsysteme, die beide die Fläche T in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln, sind als nicht wesentlich verschieden zu betrachten, wenn das eine durch eine stetige Deformation, bei der kein Verzweigungspunkt überschritten wird, in das andere übergeführt werden kann. Wir brauchen uns daher nur mit solchen Änderungen des Querschnittsystems zu beschäftigen, die sich nicht auf diese Weise herstellen lassen.

Wir lassen zunächst den Querschnitt B und die Bezeichnung seiner Ränder unverändert, ersetzen aber den Querschnitt A durch einen vom — Rand von B zum + Rand führenden Querschnitt A', der den Querschnitt A einmal überschreitet. Diese Überkreuzung kann in der Richtung vom — Rand zum

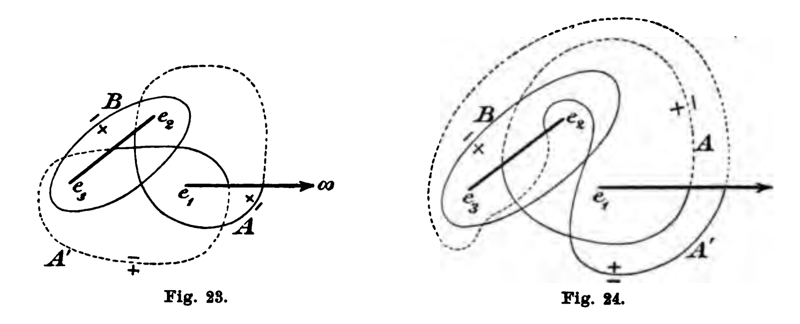


Fig. 23. Fig. 24.

+ Rand (Fig. 23), oder in der entgegengesetzten Richtung (Fig. 24) stattfinden. Im ersten Fall ist das über A' in der Richtung vom — Rand des Querschnitts B zum + Rand erstreckte Integral

$$\int \frac{dx}{s}$$

$= 2\omega_3 - 2\omega_1$, im letzteren Fall hat es den Wert $2\omega_3 + 2\omega_1$ (§ 30). Dieses Integral stellt den neuen Periodizitätsmodul am

Querschnitt B dar. Der Periodizitätsmodul am Querschnitt A' ist gleich dem ursprünglichen Periodizitätsmodul am Querschnitt A, weil der Querschnitt B keine Änderung erfahren hat. Demnach ist

$$\omega_1' = \omega_1, \qquad \omega_3' = \mp \omega_1 + \omega_3.$$

Wählen wir den neuen Querschnitt A' so, daß er den Querschnitt A wiederholt überschreitet, während der Querschnitt B nach wie vor unverändert bleibt, so treten an Stelle der vorstehenden Gleichungen die folgenden

$$(3) \qquad \omega_1' = \omega_1, \qquad \omega_3' = \nu\omega_1 + \omega_3,$$

ν bedeutet eine ganze, positive oder negative Zahl.

Die Substitutionen (1), (2) und (3), die auf die Perioden anzuwenden sind, wenn das Querschnittsystem eine der drei elementaren Änderungen erfährt, haben die beiden gemeinsamen Eigenschaften:

die Substitutionskoeffizienten sind ganze Zahlen und
die Substitutionsdeterminante ist $= 1$.

Einer Änderung des Querschnittsystems, die sich aus den drei elementaren Änderungen zusammensetzen läßt, entspricht eine Substitution

$$(4) \qquad \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3, \qquad \omega_3' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3,$$

die aus den drei elementaren Substitutionen (1), (2) und (3) zusammengesetzt ist. Sie teilt mit diesen die Eigenschaft, daß ihre Koeffizienten ganze Zahlen sind, und daß ihre Determinante

$$(5) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ist.

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß jede Substitution (4), die diese beiden Eigenschaften besitzt, aus unseren drei elementaren zusammengesetzt werden kann.

Zum Beweis nehmen wir zunächst an, es sei $\beta = 0$. Dann muß wegen (5) entweder

$$\alpha = \delta = 1$$

oder

$$\alpha = \delta = -1$$

sein.

Im ersteren Fall hat die Substitution (4) bereits die Form (3), im zweiten Fall setzen wir

$$\omega_1' = -\Omega_1, \qquad \omega_3' = -\Omega_3.$$

Aus (4) folgt nun

$$\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_3 = -\gamma\omega_1 + \omega_3.$$

In diesem Fall läßt sich also die Substitution (4) aus den beiden Substitutionen (1) und (3) zusammensetzen.

Wenn β von Null verschieden ist, können wir die Substitution (4) aus einer der Substitutionen (2) oder (3) und einer Substitution

$$\omega_1' = \alpha'\Omega_1 + \beta'\Omega_3, \qquad \omega_3' = \gamma'\Omega_1' + \delta'\Omega_3'$$

zusammensetzen, deren Koeffizienten entweder der Bedingung

$$|\beta'| < |\beta|$$

oder der Bedingung

$$\beta' = \beta, \quad |\alpha'| < |\beta| \leqq |\alpha|$$

genügen.

Zu dem Zweck wenden wir, wenn

$$|\beta| > |\alpha|$$

ist, eine Substitution der Form (2) an und setzen

$$\omega_1 = \Omega_3, \qquad \omega_3 = -\Omega_1.$$

Aus (4) folgt

$$\omega_1' = -\beta\Omega_1 + \alpha\Omega_3, \qquad \omega_3' = -\delta\Omega_1 + \gamma\Omega_3.$$

Es ist demnach

$$\beta' = \alpha \quad \text{also} \quad |\beta'| < |\beta|.$$

Ist dagegen

$$|\beta| \leqq |\alpha|,$$

so wenden wir eine Substitution der Form (3) an und setzen

$$\omega_1 = \Omega_1, \qquad \omega_3 = \nu\Omega_1 + \Omega_3.$$

Wir erhalten

$$\omega_1' = (\alpha + \beta\nu)\Omega_1 + \beta\Omega_3, \qquad \omega_3' = (\gamma + \delta\nu)\Omega_1 + \delta\Omega_3.$$

Die Zahl ν wählen wir so, daß

$$|\alpha'| = |\alpha + \beta\nu| \leqq \left|\frac{\beta}{2}\right|$$

ist.

Es ist einleuchtend, daß wir auf diesem Weg schließlich zu einer Zerlegung der Substitution (4) in elementare Substitutionen gelangen müssen.

Es bleibt zu untersuchen, welche Beziehungen zwischen den Perioden $2\omega_\nu$ und $2\omega_\nu'$ bestehen, wenn die Querschnittsysteme A, B und A', B' nur der Bedingung unterliegen, daß sie die Fläche T einfach zusammenhängend machen.

Zu dem Zweck gehen wir von der Bemerkung aus: den Wert, den das Integral

$$\int \frac{dx}{s}$$

annimmt, wenn die Integration über eine geschlossene Kurve L erstreckt wird, die die Querschnitte A, B und A', B' beliebig überkreuzt, läßt sich sowohl in der Form $\alpha \cdot 2\omega_1 + \beta \cdot 2\omega_3$ als auch in der Form $\alpha' \cdot 2\omega_1' + \beta' \cdot 2\omega_3'$ darstellen, wo $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ganze Zahlen bedeuten. Es ist daher

$$\alpha\omega_1 + \beta\omega_3 = \alpha'\omega_1' + \beta'\omega_3'.$$

Über das eine der Zahlenpaare α, β und α', β' können wir verfügen, indem wir den Weg passend wählen. Daraus folgt: es müssen gleichzeitig Gleichungen der Form

$$(4) \qquad \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3, \qquad \omega_3' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3$$

und Gleichungen der Form

$$\omega_1 = \alpha'\omega_1' + \beta'\omega_3', \qquad \omega_3 = \gamma'\omega_1' + \delta'\omega_3'$$

mit ganzzahligen Koeffizienten bestehen. Dies ist nur möglich, wenn die Substitutionsdeterminante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

ist. Hat sie den Wert $+1$, so läßt sich die Substitution (4) aus den elementaren Substitutionen (1), (2) und (3) zusammensetzen und das Querschnittsystem A, B läßt sich daher durch die entsprechenden elementaren Änderungen in das Querschnittsystem A', B' überführen. Wenn die Substitutionsdeterminante den Wert -1 hat, so müssen wir zu unseren drei Elementarsubstitutionen noch die Substitution

$$(6) \qquad \omega_1' = \omega_1, \qquad \omega_3' = -\omega_3$$

hinzufügen, um die Substitution (4) zusammensetzen zu können.

Der Substitution (6) entspricht die Vertauschung der Ränder des Querschnittes B, während die Bezeichnung der Ränder des Querschnittes A ungeändert bleibt. Eine derartige Änderung des Querschnittsystems ist aber unzulässig, denn sie verstößt gegen die Bestimmung, daß man bei einem positiven Umlauf um die Fläche T' vom $+$Rand des ersten Querschnittes auf den $+$Rand des zweiten gelangt. Folglich ist der Fall auszuschließen, daß die Determinante der Substitution (4) den Wert -1 besitzt.

Damit ist bewiesen:

Jeder zulässigen Änderung des Querschnittsystems entspricht eine Transformation der Perioden durch eine lineare homogene Substitution. Die Substitutionskoeffizienten sind ganze Zahlen; ihre Determinante hat den Wert $+1$. Umgekehrt entspricht jeder derartigen Periodentransformation eine zulässige Änderung des Querschnittsystems.

Man bezeichnet zwei Perioden, aus denen sich alle übrigen zusammensetzen lassen, als „primitives Periodenpaar".

Der Transformation (4) der Perioden entspricht die Transformation

$$\tau' = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}$$

des Periodenquotienten

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Wir setzen, Reelles und Imaginäres trennend,

$$\tau = X + iY, \qquad \tau' = X' + iY'$$

und erhalten mit Rücksicht auf (5)

$$Y' = \frac{Y}{(\alpha + \beta X)^2 + \beta^2 Y^2}.$$

Da die Größe Y positiv ist, so ist auch Y' positiv.*)

Der imaginäre Teil des Periodenquotienten τ ist positiv imaginär, wie auch immer das Querschnitt-

*) Der Beweis setzt nur voraus, daß die Substitutionskoeffizienten reell sind und daß ihre Determinante positiv ist; daß sie den Wert 1 hat, kommt nicht in Betracht.

system gewählt werden mag, vorausgesetzt, daß man die Begrenzung der Fläche T' im positiven Sinn durchlaufend vom $+$ Rand des ersten Querschnitts auf den $+$ Rand des zweiten gelangt.

Das Normalintegral erster Gattung und die algebraisch normierten Integrale zweiter und dritter Gattung bleiben ungeändert, wenn das Querschnittsystem geändert wird, denn die betreffenden Integranden hängen in keiner Weise von der Anlage des Querschnittsystems ab. Dagegen gehen in die Ausdrücke der transzendent normierten Integrale zweiter und dritter Gattung

$$Z(o) = \zeta(o) - \frac{\eta_1}{\omega_1} u(o) \qquad (\S\ 37)$$

$$W(o/\delta) = w(o/\delta) - \frac{\xi_1}{\omega_1}[u(o) - u(\delta)] \qquad (\S\ 38)$$

die Perioden ω_1 und η_1 ein; diese Integrale ändern sich demnach mit dem Querschnittsystem.

Vierter Abschnitt.

Darstellung der rationalen Funktionen der Fläche T durch transzendente Funktionen.

§ 40. Die Funktionen $P(o/\delta)$ und $S(o/\delta)$. Um das Normalintegral dritter Gattung eindeutig zu definieren, haben wir eine Fläche T'' konstruiert, indem wir von einem Punkt der Begrenzung der Fläche T' aus eine Sperrlinie L nach dem Unstetigkeitspunkt δ des Integrals und eine Sperrlinie L' nach dem unendlich fernen Punkt zogen (§ 34). Der Periodizitätsmodul des Integrals an der Sperrlinie L ist $2\pi i$, der an der Sperrlinie L' ist $-2\pi i$. Das transzendent normierte Integral dritter Gattung $W(o/\delta)$ ist am Querschnitt A stetig, am Querschnitt B besitzt es den Periodizitätsmodul

$$\frac{\pi i}{\omega_1} u(\delta) \quad (\S\ 38).$$

Im Punkt δ $(x = a,\ s = \alpha)$ bleibt die Differenz

$$W(o/\delta) - \log(x - a)$$

stetig und es ist

$$\lim\left[W(o/\delta) - \log(u(o) - u(\delta))\right] = 0 \quad (\S\ 38,\ \text{Nr. } 9). \tag{1}$$

Im unendlich fernen Punkt bleibt die Differenz

$$\lim\left[W(o/\delta) + \log u(o)\right]$$

stetig (vgl. die Reihenentwicklungen § 32 Nr. 2 und § 34 Nr. 3).

Wir bilden nun die Funktion

$$P(o/\delta) = e^{W(o/\delta)}. \tag{2}$$

Diese Funktion bleibt an den Sperrlinien L und L' stetig; diese Sperrlinien sind also nicht erforderlich, um die Funktion eindeutig zu machen.

Die Funktion $P(o/\delta)$ ist in der Fläche T' einwertig.

Im Punkt δ bleibt die Funktion stetig; sie wird in diesem Punkt Null zur ersten Ordnung. Zufolge (1) ist in diesem Punkt

$$(3) \qquad \lim \frac{P(o/\delta)}{u(o)-u(\delta)} = 1.$$

Im unendlich fernen Punkt wird die Funktion zur ersten Ordnung unendlich. Von diesen beiden Punkten abgesehen ist die Funktion $P(o/\delta)$ in der Fläche T' überall stetig und von Null verschieden.

Am Querschnitt A ist die Funktion stetig; am Querschnitt B ist

$$(4) \qquad \frac{P(\overset{+}{o}/\delta)}{P(\overset{-}{o}/\delta)} = e^{\frac{\pi i}{\omega_1} u(\delta)}.$$

Hier bedeutet $\overset{+}{o}$ einen beliebigen Punkt auf dem + Rand des Querschnitts B, $\overset{-}{o}$ den gegenüberliegenden Punkt auf dem — Rand.

Um die Funktion $P(o/\delta)$ zu bilden, haben wir das transzendent normierte Integral dritter Gattung benutzt; wir können ebenso gut das algebraisch normierte Integral $w(o/\delta)$ heranziehen. Wir setzen, unter c eine verfügbare Konstante verstehend,

$$(5) \qquad S(o/\delta) = e^{w(o/\delta) - c[u(o)-u(\delta)]}.$$

Da (§ 38 Nr. 8 und 7)

$$w(o/\delta) = W(o/\delta) + \frac{\xi_1}{\omega_1}[u(o)-u(\delta)]$$

und

$$\xi_\nu = \zeta(\delta)\,\omega_\nu - u(\delta)\,\eta_\nu \qquad (\nu = 1,2,3)$$

ist, so ergibt sich für den Exponenten auf der rechten Seite der Gleichung (5) der Ausdruck

$$W(o/\delta) + \left[\zeta(\delta) - c - \frac{\eta_1}{\omega_1} u(\delta)\right][u(o)-u(\delta)].$$

Wir setzen $c = \zeta(\delta)$ und erhalten mit Rücksicht auf (2)

$$(6) \qquad S(o/\delta) = e^{w(o/\delta) - \zeta(\delta)[u(o)-u(\delta)]}$$

$$= e^{-\frac{\eta_1}{\omega_1} u(\delta)[u(o)-u(\delta)]}\, P(o/\delta).$$

Am Querschnitt A ist die Funktion $P(o/\delta)$ stetig, folglich ist

(7) an A: $$\frac{S(\overset{+}{o}/\delta)}{S(\bar{o}/\delta)} = e^{-2\eta_1 u(\delta)}.$$

Am Querschnitt B ist wegen (6) und (4)

$$\frac{S(\overset{+}{o}/\delta)}{S(\bar{o}/\delta)} = e^{-\frac{2\eta_1\omega_3}{\omega_1}u(\delta)+\frac{\pi i}{\omega_1}u(\delta)}.$$

Zufolge der Legendreschen Relation (§ 37 Nr. 3) ist

$$\frac{2\eta_1\omega_3}{\omega_1} - \frac{\pi i}{\omega_1} = 2\eta_3.$$

Folglich ist

(8) an B: $$\frac{S(\overset{+}{o}/\delta)}{S(\bar{o}/\delta)} = e^{-2\eta_3 u(\delta)}.$$

Aus (3) und (6) folgt ferner: im Punkt δ ist

(9) $$\lim \frac{S(o/\delta)}{u(o) - u(\delta)} = 1.$$

Die Funktionen $P(o/\delta)$ und $S(o/\delta)$ haben die folgenden charakteristischen Eigenschaften gemein:

Sie sind in der Fläche T' einwertig und im Endlichen überall stetig; im Unendlichen werden sie zur ersten Ordnung unendlich.

Sie verschwinden nur in einem Punkt der Fläche T' — im Punkt δ — und zwar nur zur ersten Ordnung.

Beim Überschreiten der Querschnitte scheiden sie konstante Periodizitätsfaktoren aus.

Zwischen den Funktionen $P(o/\delta)$ und $S(o/\delta)$ besteht ein ähnlicher Unterschied wie zwischen den transzendent und den algebraisch normierten Integralen: die Funktion $P(o/\delta)$ bleibt am Querschnitt A stetig, die Funktion $S(o/\delta)$ dagegen besitzt an diesem Querschnitt einen Periodizitätsfaktor; die Funktion $S(o/\delta)$ hängt nicht von der Anlage des Querschnittsystems ab, wohl aber die Funktion $P(o/\delta)$.

§ 41. Darstellung der rationalen Funktionen der Fläche T mittelst der Funktionen $P(o/\delta)$ und $S(o/\delta)$. Das Abelsche Theorem. Mittelst der Elementarfunktion

$P(o/\delta)$ lassen sich die rationalen Funktionen der Fläche T in sehr einfacher Weise darstellen.

Es sei eine rationale Funktion $F(o)$ der Fläche T von der n-ten Ordnung vorgelegt. Wir bezeichnen die Nullpunkte dieser Funktion mit $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, ihre Unstetigkeitspunkte mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$.

Die Nullpunkte und die Unstetigkeitspunkte brauchen nicht alle untereinander verschieden zu sein: wird etwa die Funktion F im Punkt δ_1 Null zur m-ten Ordnung, so ist $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_m$ zu setzen.

Dieselben Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte besitzt die Funktion

$$(1) \qquad F_1(o) = \frac{P(o/\delta_1)\,P(o/\delta_2)\ldots P(o/\delta_n)}{P(o/\varepsilon_1)\,P(o/\varepsilon_2)\ldots P(o/\varepsilon_n)}.$$

Im unendlich fernen Punkt wird zwar jede der Funktionen $P(o/\delta_\nu)$ und $P(o/\varepsilon_\nu)$ zur ersten Ordnung unendlich, aber diese Unstetigkeiten kompensieren sich, die Funktion $F_1(o)$ bleibt stetig. Diese Funktion besitzt also keine anderen Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte als die Funktion $F(o)$.

Am Querschnitt A bleibt jede der P-Funktionen stetig, also auch die Funktion $F_1(o)$. Am Querschnitt B ist (siehe Gleichung (4) des vorigen Paragraphen)

$$(2) \qquad \frac{F_1(\overset{+}{o})}{F_1(\overset{-}{o})} = e^{\frac{\pi i}{\omega_1}\sum_{\nu=1}^{n}[u(\delta_\nu)-u(\varepsilon_\nu)]}.$$

Der Quotient

$$(3) \qquad Q(o) = \frac{F_1(o)}{F(o)}$$

ist in der Fläche T' einwertig und wird nirgends Null oder unendlich. Am Querschnitt A ist er stetig, am Querschnitt B ist zwar der Nenner stetig, aber für den Zähler gilt die Gleichung (2). Folglich ist am Querschnitt B

$$(4) \qquad \frac{Q(\overset{+}{o})}{Q(\overset{-}{o})} = e^{\frac{\pi i}{\omega_1}\sum_{\nu=1}^{n}[u(\delta_\nu)-u(\varepsilon_\nu)]}.$$

Weil die Funktion $Q(o)$ in der einfach zusammenhängenden Fläche T' nirgends Null oder unendlich wird, so ist ihr Lo-

garithmus in dieser Fläche einwertig und stetig. Zu beiden Seiten des Querschnitts A besitzt die Funktion $Q(o)$ dieselben Werte, daher können sich die Werte des Logarithmus nur um ein Multiplum von $2\pi i$ unterscheiden. Es ist also

(5) am Querschnitt A:

$$\log Q(\overset{+}{o}) - \log Q(\overset{-}{o}) = \mu \cdot 2\pi i.$$

Wegen (4) ist

(6) am Querschnitt B:

$$\log Q(\overset{+}{o}) - \log Q(\overset{-}{o}) = \frac{\pi i}{\omega_1}\sum_{\nu=1}^{n}[u(\delta_\nu) - u(\varepsilon_\nu)] - \lambda \cdot 2\pi i.$$

λ und μ bedeuten nicht näher bestimmte ganze Zahlen.

Weil die Funktion $\log Q$ in der Fläche T' einwertig und stetig ist und an den Querschnitten konstante Periodizitätsmoduln besitzt, so ist sie ein Integral erster Gattung (§ 32). Es ist demnach

$$\log Q(o) = b \cdot u(o) + c, \tag{7}$$

wo b und c Konstante bedeuten.

Das Integral erster Gattung auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung hat am Querschnitt A den Periodizitätsmodul $b \cdot 2\omega_1$, am Querschnitt B den Periodizitätsmodul $b \cdot 2\omega_3$. Der Vergleich mit (5) ergibt

$$b = \frac{\mu \pi i}{\omega_1} \tag{8}$$

und aus (6) folgt sodann

$$\sum_{\nu=1}^{n}[u(\delta_\nu) - u(\varepsilon_\nu)] = 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3, \tag{9}$$

wo λ, μ ganze Zahlen bedeuten.

Wir haben früher eine algebraische Beziehung zwischen den Nullpunkten und den Unstetigkeitspunkten einer rationalen Funktion der Fläche T nachgewiesen (§ 25), die Gleichung (9) gibt eine transzendente Relation zwischen diesen Punkten. Man bezeichnet den Inhalt dieser Gleichung als Abelsches Theorem.

Setzen wir den Wert (8) in (7) ein, so folgt

$$\log Q(o) = \frac{\mu \pi i}{\omega_1} u(o) + c$$

und hieraus mit Rücksicht auf (3) und (2)

$$(10) \qquad F(o) = \text{Konst.}\, e^{-\frac{\mu \pi i}{\omega_1} u(o)} \frac{P(o/\delta_1)\, P(o/\delta_2) \ldots P(o/\delta_n)}{P(o/\varepsilon_1)\, P(o/\varepsilon_2) \ldots P(o/\varepsilon_n)}.$$

Diese Darstellung der Funktion $F(o)$ mittelst der Elementarfunktion $P(o/\delta)$ setzt ihre Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte in Evidenz.

Aus dem Gang der Entwicklung ergibt sich, daß diese Darstellung immer möglich ist, wenn die Punkte δ_ν und ε_ν den Bedingungen des Abelschen Theorems (9) genügen; weiteren Bedingungen unterliegen diese Punkte nicht.

Führt man in die Gleichung (10) an Stelle der P-Funktionen die entsprechenden S-Funktionen ein, so ergibt sich eine Gleichung der Form (vgl. Gleichung (6) des vorigen Paragraphen):

$$(11) \qquad F(o) = \text{Konst.}\, e^{a u(o) + b} \frac{S(o/\delta_1)\, S(o/\delta_2) \ldots S(o/\delta_n)}{S(o/\varepsilon_1)\, S(o/\varepsilon_2) \ldots S(o/\varepsilon_n)},$$

und zwar ist

$$a u(o) + b = -\frac{\mu \pi i}{\omega_1} u(o) + \frac{\eta_1}{\omega_1} u(o) \sum_{\nu=1}^{n} [u(\delta_\nu) - u(\varepsilon_\nu)]$$
$$- \frac{\eta_1}{\omega_1} \sum_{\nu=1}^{n} [u(\delta_\nu)^2 - u(\varepsilon_\nu)]^2.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (9)

$$a = -\frac{\mu \pi i}{\omega_1} + 2 \lambda \eta_1 + 2 \mu \frac{\omega_3 \eta_1}{\omega_1},$$

und auf Grund der Legendreschen Relation (§ 37 Nr. 3)

$$a = 2 \lambda \eta_1 + 2 \mu \eta_3.$$

Wir substituieren diesen Wert in (11) und vereinigen den Faktor e^b mit der multiplikativen Konstanten. Es folgt:

$$(12) \quad F(o) = \text{Konst.}\, e^{(2 \lambda \eta_1 + 2 \mu \eta_3) u(o)} \frac{S(o/\delta_1)\, S(o/\delta_2) \ldots S(o/\delta_n)}{S(o/\varepsilon_1)\, S(o/\varepsilon_2) \ldots S(o/\varepsilon_n)}.$$

Ein besonderes Interesse bietet der Fall, daß die n Nullpunkte der Funktion $F(o)$ in einen Punkt δ und ihre n Unstetigkeitspunkte in einen Punkt ε zusammenfallen. Auf Grund

des Abelschen Theorems müssen die Punkte δ und ε der Bedingung

$$u(\delta) - u(\varepsilon) = \frac{2\lambda}{n}\omega_1 + \frac{2\mu}{n}\omega_3 \tag{13}$$

genügen, wo λ und μ ganze Zahlen bedeuten.

In diesem Fall ist die Funktion

$$\Phi(o) = \sqrt[n]{F(o)} = \text{Konst.}\, e^{-\frac{\mu\pi i}{n\omega_1}u(o)} \frac{P(o/\delta)}{P(o/\varepsilon)} \quad (10) \tag{14}$$

$$= \text{Konst.}\, e^{\left(\frac{2\lambda}{n}\eta_1 + \frac{2\mu}{n}\eta_3\right)u(o)} \frac{S(o/\delta)}{S(o/\varepsilon)} \quad (12)$$

zwar nicht in der Fläche T, wohl aber in der einfach zusammenhängenden Fläche T' einwertig. Die Periodizitätsfaktoren, die die Funktion an den Querschnitten ausscheidet, sind n-te Einheitswurzeln.

Wir werden auf diese „Wurzelfunktionen" noch ausführlicher zurückkommen.

Aus dem Abelschen Theorem ergibt sich eine Folgerung, die für unsere weiteren Entwicklungen von grundlegender Bedeutung ist.

Wir haben früher bewiesen, daß es keine rationale Funktion der Fläche T von der ersten Ordnung gibt. Wir schließen nun hieraus:

Zwischen den Werten, die das Normalintegral erster Gattung $u(o)$ in zwei verschiedenen Punkten δ und ε der Fläche T annimmt, kann keine Gleichung der Form

$$u(\delta) - u(\varepsilon) = 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3$$

mit ganzzahligen Koeffizienten λ, μ bestehen.

Wenn nämlich eine derartige Gleichung bestände, so könnten wir eine rationale Funktion der Fläche T

$$F(o) = e^{-\frac{\mu\pi i}{\omega_1}u(o)} \frac{P(o/\delta)}{P(o/\varepsilon)}$$

bilden; die Ordnung dieser Funktion wäre $= 1$.

Wenn wir den Integrationsweg nicht auf die Fläche T' beschränken, sondern die Möglichkeit offen lassen, daß er die Querschnitte beliebig oft überkreuzt, so kann das Integral $u(o)$

in einem Punkt der Fläche T unendlich viele verschiedene Werte erlangen, die sich um Multipla der Perioden unterscheiden. Unser Satz besagt, daß das Integral erster Gattung auch bei unbeschränktem Integrationsweg nicht in zwei verschiedenen Punkten der Fläche T denselben Wert annehmen kann.

§ 42. Die Funktionen $\sigma(o)$ und $H(o)$. Wir haben im vorausgehenden die rationalen Funktionen der Fläche T mittelst der Elementarfunktionen $P(o/\delta)$ und $S(o/\delta)$ dargestellt, die nur in einem Punkt, dem Punkt δ, verschwinden und nur in einem Punkt, dem unendlich fernen Punkt, unendlich werden. Für die Darstellung der rationalen Funktionen kommt nur der Nullpunkt der Elementarfunktionen, aber nicht ihr Unstetigkeitspunkt in Betracht. Es liegt daher nahe zu fragen, ob es nicht eine Funktion gibt, die von jeder Unstetigkeit frei ist, aber für die Darstellung der rationalen Funktionen der Fläche dieselben Dienste leistet. Eine derartige Funktion werden wir offenbar erhalten, wenn wir die Funktion $S(o/\delta)$ mit einer Funktion $\sigma(o)$ multiplizieren, die den folgenden Bedingungen genügt:

1. Die Funktion $\sigma(o)$ ist in der ganzen Fläche T' einwertig und stetig.

2. Im unendlich fernen Punkt verschwindet sie zur ersten Ordnung, sie besitzt aber keine weiteren Nullpunkte.

3. Wenn ein Querschnitt überschritten wird, so ändert sich die Funktion um einen Periodizitätsfaktor, auf den es für die Zwecke, die wir im Auge haben, nicht weiter ankommt.

Die logarithmische Derivierte

$$f(o) = \frac{d \log \sigma(o)}{dx}$$

ist ebenso wie die Funktion $\sigma(o)$ selbst in der Fläche T' einwertig.

Im Endlichen ist die Funktion $\log \sigma(o)$ überall stetig, daraus folgt, daß im Endlichen das Produkt $s \cdot f(o)$ überall stetig ist (§ 27).

Im Unendlichen bleibt das Produkt $\sqrt{x} \cdot \sigma(o)$ wegen (2) stetig, verhält sich die Funktion $f(o)$ wie die

Funktion $-\frac{1}{2x}$, das Produkt $s\cdot f(o)$ wird daher unstetig wie die Funktion $-\sqrt{x}$, also in derselben Weise wie das negativ genommene Normalintegral zweiter Gattung (§ 33). Wir setzen deswegen

$$\text{(4)} \qquad \log\sigma(o) = -\int \zeta(o)\frac{dx}{s}\cdot$$

Die noch zur Verfügung stehende Integrationskonstante wählen wir so, daß im unendlich fernen Punkt

$$\text{(5)} \qquad \lim\frac{\sigma(o)}{u(o)} = 1$$

ist. Wir haben nun die Periodizitätsfaktoren der Funktion $\sigma(o)$ zu bestimmen.

Am Querschnitt A ist (4)

$$\frac{d\log\sigma(\overset{+}{o})}{dx} - \frac{d\log\sigma(\overset{-}{o})}{dx} = -\frac{1}{s}[\zeta(\overset{+}{o}) - \zeta(\overset{-}{o})] = -\frac{2\eta_1}{s}$$

also

$$\text{(6) am Querschnitt } A\text{: } \log\frac{\sigma(\overset{+}{o})}{\sigma(\overset{-}{o})} = 2\eta_1[u(\overset{-}{o}) + c_1]\cdot$$

Dementsprechend ist

$$\text{(7) am Querschnitt } B\text{: } \log\frac{\sigma(\overset{+}{o})}{\sigma(\overset{-}{o})} = 2\eta_3[u(\overset{-}{o}) + c_3]\cdot$$

Die Buchstaben c_1 und c_3 bedeuten Konstante, die wegen der Vieldeutigkeit der Logarithmen nur bis auf ein Multiplum von $2\pi i$ bestimmt sind. Würden wir die auf den rechten Seiten der Gleichungen (6) und (7) vorkommenden Integralwerte $u(\overset{-}{o})$ durch die entsprechenden Integralwerte $u(\overset{+}{o})$ ersetzen, so wären die Konstanten c_1, c_3 um $2\omega_1$ beziehungsweise $2\omega_3$ zu vermindern.

Unter der Voraussetzung, daß wir das kanonische Querschnittsystem zu Grunde legen, nimmt nicht nur die Funktion s, sondern auch die Funktion $\zeta(o)$ in sich deckenden Punkten o_1, o_2 der Fläche T entgegengesetzte Werte an (§ 33). Wenn die Punkte o_1 und o_2 auf sich deckenden Wegen fortrücken, besteht deshalb wegen (4) die Gleichung

$$d\log\sigma(o_1) = d\log\sigma(o_2)\,.$$

Der Quotient

$$\frac{\sigma(o_2)}{\sigma(o_1)}$$

besitzt demnach einen konstanten Wert. Wenn die Punkte o_1 und o_2 ins Unendliche rücken, so ist zufolge (5)

$$\lim \frac{\sigma(o_1)}{u(o_1)} = 1 \quad \text{und} \lim \frac{\sigma(o_2)}{u(o_2)} = 1.$$

Da nun

$$u(o_2) = -u(o_1)$$

ist, so folgt

$$\frac{\sigma(o_2)}{\sigma(o_1)} = -1. \tag{8}$$

Die Funktion $\sigma(o)$ nimmt also in sich deckenden Punkten der Fläche T' entgegengesetzte Werte an. Eine Ausnahmestellung nehmen wieder die Verzweigungspunkte ein.

Der Verzweigungspunkt e_1 ist von einem unendlich nahen Punkt o_1 des oberen Blattes durch den Querschnitt A getrennt, von dem Punkt o_2 des unteren Blattes nicht (vgl. die Fig. 12, § 29). Folglich ist (6)

$$\frac{\sigma(e_1)}{\sigma(o_1)} = e^{2\eta_1[u(o_1)+c_1]} = e^{2\eta_1[u(e_1)-2\omega_1+c_1]} = e^{2\eta_1(c_1-\omega_1)} \qquad (\S\ 35,\ \text{Nr. } 7).$$

Zufolge (8) ist der links stehende Quotient $= -1$, folglich ist

$$e^{2\eta_1 c_1} = -e^{2\eta_1\omega_1}$$

und in gleicher Weise ist zu zeigen, daß

$$e^{2\eta_3 c_3} = -e^{2\eta_3\omega_3}$$

ist. Substituieren wir diese Werte in (6) und (7), so folgt

$$(9) \quad \begin{cases} \text{am Querschnitt } A \text{ ist: } \dfrac{\sigma(\overset{+}{o})}{\sigma(\bar{o})} = -e^{2\eta_1[u(\bar{o})+\omega_1]} \\[2ex] \text{am Querschnitt } B \text{ ist: } \dfrac{\sigma(\overset{+}{o})}{\sigma(\bar{o})} = -e^{2\eta_3[u(\bar{o})+\omega_3]}. \end{cases}$$

Die Funktion $\sigma(o)$, die durch die Gleichung (4) und die Nebenbedingung (5) bestimmt ist, genügt den Bedingungen (1), (2) und (3).

Wir können nun leicht eine Funktion bilden, die in der ganzen Fläche T' einwertig und stetig ist, und nur in einem

beliebig vorzuschreibenden Punkt δ verschwindet. Wir setzen (§ 40, Nr. 6)

$$\sigma(o/\delta) = \frac{S(o/\delta)\,\sigma(o)}{\sigma(\delta)}. \tag{10}$$

Die Funktion $\sigma(o/\delta)$ bleibt im unendlich fernen Punkt stetig, denn in diesem Punkt wird zwar die Funktion $S(o/\delta)$ zur ersten Ordnung unendlich, aber die Funktion $\sigma(o)$ wird zur ersten Ordnung Null.

Im Punkt δ ist (§ 40, Nr. 9)

$$\lim \frac{\sigma(o/\delta)}{u(o) - u(\delta)} = 1. \tag{11}$$

Die Periodizitätseigenschaften der Funktion $\sigma(o/\delta)$ ergeben sich aus den Gleichungen (9) in Verbindung mit den Gleichungen (7) und (8) des § 40.

$$\begin{aligned} &\text{Am Querschnitt } A \text{ ist: } \frac{\sigma(\overset{+}{o}/\delta)}{\sigma(\bar{o}/\delta)} = -\,e^{2\eta_1[u(\bar{o}) - u(\delta) + \omega_1]} \\ &\text{Am Querschnitt } B \text{ ist: } \frac{\sigma(\overset{+}{o}/\delta)}{\sigma(\bar{o}/\delta)} = -\,e^{2\eta_2[u(\bar{o}) - u(\delta) + \omega_2]}. \end{aligned} \tag{12}$$

Diese Gleichungen werden mit den Gleichungen (9) identisch, wenn der Nullpunkt δ in den unendlich fernen Punkt rückt.

Bei der Definition der Funktion $\sigma(o)$ haben wir das algebraisch normierte Integral zweiter Gattung $\zeta(o)$ benutzt (4). Wir führen nun statt dessen das transzendent normierte Integral (§ 37, Nr. 4)

$$Z(o) = \zeta(o) - \frac{\eta_1}{\omega_1}\,u(o)$$

ein und setzen

$$\log H(o) = -\int Z(o)\,\frac{dx}{s}. \tag{13}$$

Wegen

$$\frac{dx}{s} = -\,du$$

folgt

$$\log H(o) = \log \sigma(o) - \frac{\eta_1}{2\omega_1}\,u^2(o) + \log c$$

und hieraus

$$H(o) = c\,e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2(o)}\,\sigma(o). \tag{14}$$

Die Verfügung über die Integrationskonstante c behalten wir uns vor, sie wird erst im nächsten Abschnitt erfolgen.

Die Gleichung (14) verallgemeinernd setzen wir ferner

$$(15)\qquad H(o/\delta) = c e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}[u(o)-u(\delta)]^2}\sigma(o/\delta).$$

Die Funktion $H(o/\delta)$ hat offensichtlich mit der Funktion $\sigma(o/\delta)$ den Nullpunkt gemein.

An den Querschnitten A und B ist

$$[u(\overset{+}{o}) - u(\delta)]^2 - [u(\overset{-}{o}) - u(\delta)]^2 = 4\omega_\nu[u(\overset{-}{o}) + \omega_\nu - u(\delta)].$$

Dem Querschnitt A entspricht der Index $\nu = 1$, dem Querschnitt B der Index $\nu = 3$.

Wegen (12) ist daher

$$(16)\quad \text{Am Querschnitt } A: \qquad \frac{H(\overset{+}{o}/\delta)}{H(\overset{-}{o}/\delta)} = -1.$$

Mit Rücksicht auf die Legendresche Relation (§ 37, Nr. 3) ergibt sich

$$(17)\quad \text{Am Querschnitt } B \text{ ist } \frac{H(\overset{+}{o}/\delta)}{H(\overset{-}{o}/\delta)} = -e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}[u(\overset{-}{o})-u(\delta)+\omega_3]}.$$

Die Gleichungen (16) und (17) gelten auch für die Funktion $H(o)$. Man hat für diesen Fall nur $u(\delta) = 0$ zu setzen.

Durch die Konstruktion der Funktionen $\sigma(o/\delta)$ und $H(o/\delta)$ haben wir die im Eingang dieses Paragraphen gestellte Aufgabe gelöst: diese beiden Funktionen sind in der ganzen Fläche T' einwertig und stetig; soweit es sich um die Darstellung der rationalen Funktionen der Fläche T handelt, erfüllen sie denselben Zweck wie die Elementarfunktionen $S(o/\delta)$ und $P(o/\delta)$: wir können in den Formeln (10) und (12) des § 41 ohne weiteres $P(o/\delta)$ durch $H(o/\delta)$ und $S(o/\delta)$ durch $\sigma(o/\delta)$ ersetzen.

Die Formeln, die wir im vorausgehenden entwickelt haben, stellen die Existenz dieser Funktion sicher und lassen ihre charakteristischen Eigenschaften erkennen; zur Berechnung der Funktionswerte sind sie nicht geeignet: zu diesem Zweck müssen wir andere Hilfsmittel heranziehen.

§ 43. Analytische Fortsetzung der Funktionen $\sigma(o)$ und $H(o)$. Wir haben die Funktionen $\sigma(o)$ und $H(o)$ vorerst nur für die einfach zusammenhängende Fläche T' definiert. Da sich diese Funktionen überall regulär verhalten, so können wir sie über die Begrenzung der Fläche T', die Querschnitte A und B, hinweg analytisch fortsetzen (vgl. F. Th. § 47).

Um den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Funktionszweigen, zu denen die analytische Fortsetzung führt, festzustellen, setzen wir die Funktion von einem beliebigen Punkt o aus längs eines in sich zurücklaufenden Weges L fort und sehen zu, welche Beziehungen zwischen dem Anfangswert und dem Endwert bestehen. Wir führen zunächst die Untersuchung für die Funktion $H(o)$ durch.

Nehmen wir an, der Weg L überkreuze den Querschnitt B nicht und den Querschnitt A nur einmal. Längs dieses Querschnitts besteht die Relation

$$H(\overset{+}{o}) = - H(\overset{-}{o})$$

(Gleichung (16) des vorigen Paragraphen). Dementsprechend besteht auch zwischen dem Anfangswert $H(o)$ und dem Endwert — er möge mit $H^*(o)$ bezeichnet werden — dieselbe Relation

$$H^*(o) = - H(o). \tag{1}$$

Nehmen wir zweitens an, der Weg L überkreuze den Querschnitt A nicht, dagegen überschreite er den Querschnitt B einmal und zwar in der Richtung von der + Seite zur − Seite.

Wir setzen die Funktion $H(o)$ zunächst bis zu dem Punkt $\overset{+}{p}$ fort, in dem der Weg L den + Rand des Querschnitts B trifft. Setzen wir dann die Funktion den Querschnitt überschreitend fort, so wird dem Punkt $\overset{-}{p}$ auf dem − Rand des Querschnitts B der Funktionswert $H(\overset{+}{p})$ zugeordnet, während ihm der Funktionswert $H(\overset{-}{p})$ entspricht, wenn die analytische Fortsetzung o h n e Überschreitung eines Querschnitts erfolgt.

Wenn wir den letztern Wert längs des Stückes $\overset{-}{p}o$ des Weges L fortsetzen, so langen wir in o mit dem Funktions-

wert $H(o)$ an, da ja die Funktion H in der Fläche T' einwertig ist. Setzen wir anstatt dessen den Wert

$$H(\overset{+}{p}) = -e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}[u(\overset{-}{p})+\omega_3]} H(\overset{-}{p})$$

(Gleichung (17) des vorigen Paragraphen) längs desselben Weges fort, so kommen wir in o mit dem Wert

$$H^*(o) = -e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}[u(o)+\omega_3]} H(o) \tag{2}$$

an. Diese Gleichung zeigt, daß es nicht darauf ankommt, an welcher Stelle der Querschnitt B überschritten wird. Dasselbe gilt selbstverständlich auch für die Überschreitung des Querschnitts A.

Wenn wir einen beliebigen Weg einmal im einen Sinn und dann im entgegengesetzten Sinn durchlaufen, so kehrt die Funktion zum Ausgangswert zurück. Auf Grund dieser Bemerkung können wir einen beliebigen in sich zurücklaufenden Weg L durch eine Anzahl von ebenfalls in sich zurücklaufenden Wegen ersetzen, von denen ein jeder nur einen Querschnitt einmal überschreitet. Beispielsweise können wir einen in sich zurücklaufenden Weg L, der erst die Ränder des Querschnitts A in den Punkten $\overset{+}{p}$, $\overset{-}{p}$ und dann die Ränder des Querschnitts B in den Punkten $\overset{+}{q}$, $\overset{-}{q}$ trifft, aus zwei Wegen C und C' zusammensetzen, von denen der erste nur den Querschnitt A, der zweite nur den Querschnitt B überschreitet. Der Weg C besteht aus dem Stück des Weges L von o über $\overset{+}{p}$ nach $\overset{-}{p}$ und einem Weg L', der innerhalb der Fläche T' von $\overset{-}{p}$ nach o führt. Der Weg C' führt längs L' von o nach $\overset{-}{p}$ und von da längs L über $\overset{+}{q}$, $\overset{-}{q}$ nach o.

Durchlaufen wir zuerst die Kurve C und dann die Kurve C', so gelangen wir vom Anfangswert $H(o)$ ausgehend zuerst zum Wert $-H(o)$ (1) und dann zum Wert (2)

$$e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}[u(o)+\omega_3]} H(o).$$

Durchlaufen wir dagegen zuerst die Kurve C' und dann die Kurve C, so gelangen wir zuerst zum Wert (2)

$$-e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}[u(o)+\omega_3]} H(o)$$

und dann zum Wert

$$e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}[u(o)+2\omega_1+\omega_3]} H(o)$$

also zu demselben Wert.

Die Reihenfolge in der die Querschnitte überschritten werden, kommt also nicht in Betracht.

Nehmen wir an, der in sich zurücklaufende Weg L überschreite den Querschnitt A λ-mal, den Querschnitt B μ-mal. Das Überschreiten soll als positiv oder als negativ gezählt werden, je nachdem es an der + Seite zur — Seite hin oder in der entgegengesetzten Richtung erfolgt (vgl. § 30).

Der Endwert, zu dem die analytische Fortsetzung der Funktion $H(o)$ längs des Weges L führt, hängt nur von den Zahlen λ und μ ab, ist aber im übrigen von der Gestalt des Weges L unabhängig.

Diese Bemerkung gilt auch für das Integral erster Gattung $u(o)$, daher gilt sie auch für die Funktion

$$\sigma(o) = \frac{1}{c} e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1} u^2(o)} H(o)$$

(Nr. 14 des vorigen Paragraphen).

Setzen wir die Funktion längs eines in sich zurücklaufenden Weges C fort, der den Querschnitt A von der + Seite zur — Seite hin überschreitet, so erhalten wir aus (1) die Beziehung zwischen Anfangswert und Endwert

$$(3) \qquad \frac{\sigma^*(o)}{\sigma(o)} = - e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}[(u(o)+2\omega_1)^2 - u^2(o)]} = - e^{2\eta_1[u(o)+\omega_1]}.$$

Erfolgt die Fortsetzung längs des Weges C', der den Querschnitt B von der + Seite zur — Seite hin überschreitet, so ergibt sich aus (2)

$$\frac{\sigma^*(o)}{\sigma(o)} = - e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}[(u(o)+2\omega_3)^2 - u^2(o)] - \frac{\pi i}{\omega_1}[u(o)+\omega_3]}.$$

Der Exponent der Exponentialgröße rechts ist

$$= \frac{2}{\omega_1}\left(\eta_1 \omega_3 - \frac{\pi i}{2}\right)(u(o) + \omega_3)$$

also auf Grund der Legendreschen Relation

$$= 2\eta_3[u(o) + \omega_3].$$

Wir erhalten daher für die Fortsetzung längs des Weges C' die zu (3) analoge Formel

$$\frac{\sigma^*(o)}{\sigma(o)} = -e^{2\eta_3[u(o)+\omega_3]}. \tag{4}$$

§ 44. Abbildung der Fläche T' auf eine schlichte Fläche. Wir haben bisher einen Punkt der zweiblättrigen Fläche T durch das zugehörige Wertsystem x, s festgelegt. Der am Schluß des § 41 bewiesene Satz gibt uns ein Mittel an die Hand, die Punkte der Fläche T den Werten einer einzigen Variabeln zuzuordnen. Zufolge dieses Satzes kann das Integral erster Gattung nicht in zwei verschiedenen Punkten der Fläche T denselben Wert annehmen. Daraus folgt: ein Punkt der Fläche T ist eindeutig bestimmt, wenn einer der ihm zugeordneten Werte des Normalintegrals erster Gattung $u(o)$ gegeben ist. Eine eindeutige Funktion des Orts in der Fläche T ist demnach auch eine einwertige Funktion der Variabeln u.

Wenn der Integrationsweg auf die einfach zusammenhängende Fläche T' beschränkt wird, so ist auch umgekehrt der Wert des Integrals $u(o)$ eine eindeutige Funktion des Orts in der Fläche T'. Das Normalintegral erster Gattung vermittelt demnach eine wechselseitig eindeutige Abbildung der einfach zusammenhängenden Fläche T' auf eine schlichte Ebene. Weil das Integral u nirgends unendlich wird, kann diese Abbildung nur ein endliches Stück der u-Ebene bedecken. Um die Gestalt dieses Flächenstücks festzustellen, bilden wir die Begrenzung der Fläche T' — die Querschnitte A und B — auf die u-Ebene ab.

Die Werte, die das Integral $u(o)$ auf den + Rändern der Querschnitte A und B annimmt, sind um $2\omega_1$ beziehungsweise $2\omega_3$ größer als die Werte, die den gegenüberliegenden Punkten der — Ränder zugeordnet sind. Daraus folgt: die beiden Ränder eines Querschnittes werden in zwei Parallelkurven abgebildet. Die Abbildung der Fläche T' auf die u-Ebene ist also ein Parallelogramm Π; die Seiten sind Kurven, deren Gestalt von der Anlage des Querschnittsystems abhängt. Man bezeichnet dieses Parallelogramm Π als Periodenparallelogramm.

Bezeichnen wir die Punkte, in denen sich die Ränder der Querschnitte A, B treffen, mit $\varkappa\lambda\mu\nu$ (s. Fig. 25). Zwischen den zugeordneten Integralwerten bestehen die Beziehungen

$$u(\lambda) - u(\varkappa) = u(\mu) - u(\nu) = 2\omega_1$$
$$u(\nu) - u(\varkappa) = u(\mu) - u(\lambda) = 2\omega_3.$$

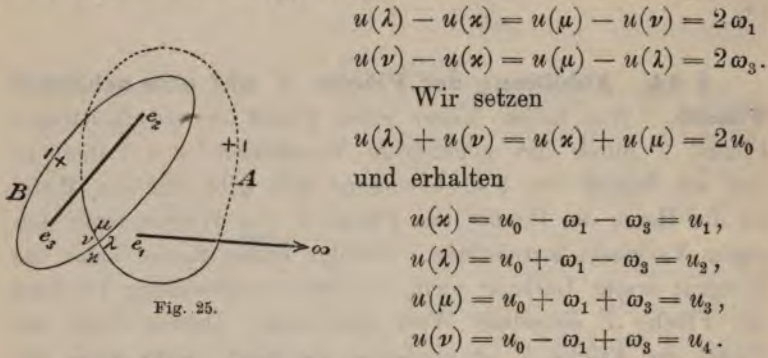


Fig. 25.

Wir setzen

$$u(\lambda) + u(\nu) = u(\varkappa) + u(\mu) = 2u_0$$

und erhalten

$$u(\varkappa) = u_0 - \omega_1 - \omega_3 = u_1,$$
$$u(\lambda) = u_0 + \omega_1 - \omega_3 = u_2,$$
$$u(\mu) = u_0 + \omega_1 + \omega_3 = u_3,$$
$$u(\nu) = u_0 - \omega_1 + \omega_3 = u_4.$$

Durchläuft ein Punkt die Begrenzung der Fläche T' im Sinn $\varkappa \overset{-}{B} \lambda \overset{+}{A} \mu \overset{+}{B} \nu \overset{-}{A} \varkappa$, so durchläuft der entsprechende Punkt der u-Ebene die Begrenzung des Periodenparallelogramms Π im Sinn $u_1 u_2 u_3 u_4$. Man hat also auf der Seite $u_1 u_2$ fort schreitend die Seite $u_1 u_4$ zur Linken.

Wenn wir das kanonische Querschnittsystem zu Grunde legen, so entsprechen sich deckenden Punkten der Fläche T' entgegengesetzt gleiche Werte des Normalintegrals u. Daraus folgt: unter dieser Voraussetzung liegt das Periodenparallelogramm Π symmetrisch zum Nullpunkt der u-Ebene.

Eine jede Seite dieses Parallelogramms liegt daher symmetrisch zu der ihr parallelen und sie kann mit ihr außerdem durch eine Translation zur Deckung gebracht werden, folglich liegt jede Seite zu dem Punkt symmetrisch, der die Verbindungslinie ihrer Ecken halbiert. Weil die Seiten nicht geschlossene Kurven sind, müssen sie durch die Symmetriepunkte hindurchgehen.

Wenn wir von der in Fig. 25 dargestellten Gestalt des Querschnittsystems zum kanonischen System übergehen, so rückt der Punkt μ in den Verzweigungspunkt e_2. Folglich ist

$$u(\mu) = u_3 = \omega_2 = \omega_1 + \omega_3 \quad \text{also} \quad u_0 = 0.$$

Den Eckpunkten des Periodenparallelogramms entsprechen also die Werte

$$u = \pm\,\omega_1 \pm \omega_3.$$

Die Symmetriepunkte der Seiten sind in diesem Fall die Punkte, die den Werten $\pm \omega_1$ und $\pm \omega_3$ entsprechen, also Bilder der Verzweigungspunkte e_1 und e_3.

Wir haben bisher nur die Abbildung ins Auge gefaßt, die sich ergibt, wenn wir den Weg, über den das Integral $u(o)$ zu erstrecken ist, auf das Innere der Fläche T' beschränken. Nehmen wir nun an, der Integrationsweg überschreite den Querschnitt A λ-mal und den Querschnitt B μ-mal. Jede Überkreuzung soll wieder als positiv oder als negativ gezählt werden, je nachdem sie in der Richtung von der + Seite zur — Seite oder in der umgekehrten Richtung erfolgt.

Einem Punkt der Fläche T, dem vorher der Integralwert u zugeordnet war, ist nunmehr der Integralwert

$$u + 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3$$

zugeordnet. Halten wir die Zahlen λ und μ fest, so ergibt sich eine Abbildung der Fläche T auf ein Parallelogramm $\Pi_{\lambda\mu}$, das aus dem Parallelogramm Π durch eine Translation hervorgeht; Richtung und Größe derselben sind durch den Vektor bestimmt, der vom Nullpunkt zum Punkt $2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3$ führt.

Die Gesamtheit der Parallelogramme $\Pi_{\lambda\mu}$ bedeckt die Ebene einfach und lückenlos. Man bezeichnet auch die Parallelogramme $\Pi_{\lambda\mu}$ als Periodenparallelogramme; das Parallelogramm Π, von dem wir ausgegangen sind, wird als fundamentales Periodenparallelogramm bezeichnet.

Die Punkte der u-Ebene, die demselben Punkt der Fläche T entsprechen, bezeichnet man als homologe Punkte; die zugehörigen Integralwerte bezeichnet man in Anlehnung an die Terminologie der Zahlentheorie als kongruent und drückt die Beziehung

$$v - u = 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3$$

durch das Zeichen

$$v \equiv u$$

aus.

Ein jedes Periodenparallelogramm enthält von jedem System homologer Punkte einen und nur einen Punkt. Dabei sind die Punkte der Fläche T', die sich auf den Rändern eines Querschnitts gegenüberliegen, als verschiedene Punkte

zu betrachten. Wenn wir das Periodenparallelogramm als Bild der unzerschnittenen Fläche T auffassen, so entsprechen Punkten auf den Kurven A, B je zwei verschiedene Punkte auf der Begrenzung des Parallelogramms.

Dem Schnittpunkt der Kurven A, B entsprechen die vier Eckpunkte des Parallelogramms. Um eine ausnahmslos eindeutige Beziehung herzustellen, wollen wir dahin übereinkommen: wenn wir das Periodenparallelogramm als Bild der unzerschnittenen Fläche T auffassen, so rechnen wir von jedem Paar paralleler Seiten nur die eine, und von den vier Eckpunkten nur einen zum Parallelogramm.

Einer Kurve in der u-Ebene, die einen Punkt des fundamentalen Periodenparallelogramms mit dem homologen Punkt im Parallelogramm $\Pi_{\lambda\mu}$ verbindet, entspricht in der Fläche T eine geschlossene Kurve L. Diese Kurve muß den Querschnitt A λ-mal und den Querschnitt B μ-mal öfter in der Richtung von der $+$ Seite zur $-$ Seite überschreiten als in der umgekehrten Richtung (vgl. § 30).

Konstruieren wir in der u-Ebene ein von zwei Paaren paralleler Kurvenbögen begrenztes Parallelogramm Π', das von jedem System homologer Punkte einen und — von den Randpunkten abgesehen — auch nur einen enthält.

Entsprechende Punkte der parallelen Randkurven sind notwendig homologe Punkte. In der Fläche T wird daher jedes Paar paralleler Randkurven auf die Ränder einer Kurve abgebildet und da die vier Eckpunkte des Parallelogramms homologe Punkte sind, so sind die Bildkurven geschlossene Kurven, die sich in dem gemeinsamen Bildpunkt der vier Eckpunkte schneiden. Sie zerschneiden die dreifach zusammenhängende Fläche T in eine einfach zusammenhängende Fläche T'. Auf diese wird das Parallelogramm wechselseitig eindeutig abgebildet.

Durch diese Betrachtung wird die im § 39 besprochene Abänderung des Querschnittsystems in ein neues Licht gerückt.

Bei den folgenden Betrachtungen nehmen wir der Einfachheit wegen an, die Fläche T' sei durch ein kanonisches Querschnittsystem begrenzt, so daß das fundamentale Periodenparallelogramm in Beziehung auf den Nullpunkt der u-Ebene

symmetrisch ist. Welche Gestalt seine Seiten besitzen, kommt nicht in Betracht; bei der graphischen Darstellung werden wir sie der Einfachheit wegen als geradlinig annehmen.

§ 45. Spezielle Fälle der Abbildung. Wir wollen die Abbildung der Fläche T' auf die u-Ebene unter der Annahme weiter verfolgen, daß die Größen g_2 und g_3 reell sind. Dabei müssen wir die beiden Fälle unterscheiden, daß die drei Größen e_ν reell sind und daß nur eine derselben reell ist, während die beiden anderen konjugiert imaginär sind.

Nehmen wir zunächst an, die drei Größen e_ν seien reell und zwar sei gemäß der früher getroffenen Bestimmung $e_1 > e_2 > e_3$.

Die Halbperiode ω_1 ist in diesem Fall reell und positiv, die Halbperiode ω_3 ist rein imaginär und zwar positiv imaginär (§ 36 Anfang).

Das kanonische Querschnittsystem konstruieren wir in der Weise, daß wir den Querschnitt A um die gerade Strecke $e_2 e_1$ und den Querschnitt B um die gerade Strecke $e_3 e_2$ zusammenziehen. Reellen Werten der Variabeln x entspricht ein reeller Wert der Größe

$$s = 2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)},$$

wenn $x \geqq e_1$ oder $e_2 \geqq x \geqq e_3$ ist; der Wert von s ist dagegen rein imaginär, wenn $x < e_3$ oder $e_1 > x > e_2$ ist.

Weil demnach für reelle Werte von x der Differentialquotient

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{s}$$

entweder reell oder rein imaginär ist, entsprechen den Abschnitten der Abszissenachse in den beiden Blättern der Fläche T, die durch die Verzweigungspunkte begrenzt werden, in der u-Ebene geradlinige Strecken, die teils zur Abszissenachse, teils zur Ordinatenachse parallel sind. Dies gilt insbesondere auch für die Bilder der Querschnitte, weil diese ja in der Grenzlage in die Abszissenachsen der Fläche T fallen.

Das fundamentale Periodenparallelogramm Π ist somit ein Rechteck, das zu den Koordinatenachsen symmetrisch liegt.

Gehen wir zunächst von der in Fig. 26 dargestellten Gestalt des Querschnittsystems aus, so ist ersichtlich, daß wir im untern Blatt der Fläche T längs der — Seite der Abszissenachse fortschreitend zu den drei Punkten e_ν gelangen können, ohne einen Querschnitt zu überschreiten. Daran wird nichts geändert, wenn wir in der oben angegebenen Weise zu dem kanonischen Querschnittsystem übergehen.

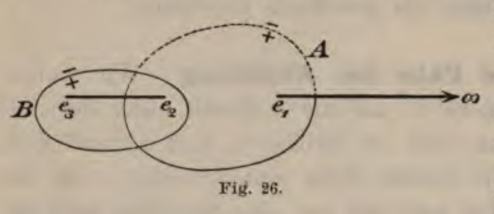


Fig. 26.

Daraus folgt: durchlaufen wir die — Seite der Abszissenachse des unteren Blattes im Sinne der abnehmenden Abszissen, so erreicht das Integral u der Reihe nach die Werte

$$0 \quad \omega_1 \quad \omega_2 = \omega_1 + \omega_3 \quad \omega_3 \quad 0.$$

Den Abschnitten

$$\infty e_1 \quad e_1 e_2 \quad e_2 e_3 \quad e_3 - \infty$$

der — Seite der Abszissenachse des unteren Blattes entsprechen also in der u-Ebene die geradlinigen Strecken

$$0 \omega_1 \quad \omega_1 \omega_2 \quad \omega_2 \omega_3 \quad \omega_3 0.$$

Die negative Halbebene des unteren Blattes der Fläche T wird demnach auf ein Rechteck abgebildet, das im ersten Quadranten der u-Ebene liegt.

Die Abbildung der übrigen drei Halbebenen der Fläche T ergibt sich am einfachsten mittelst des Schwarzschen Spiegelungsprinzips.*) Dieses Prinzip besagt:

Entspricht bei einer konformen Abbildung einer geradlinigen Strecke wieder eine geradlinige Strecke, so entsprechen Punkten, die zur ersten Strecke symmetrisch liegen, Punkte, die zur zweiten Strecke symmetrisch liegen; einer Spiegelung an der einen Strecke entspricht also eine Spiegelung an der anderen.

Längs der Abschnitte $e_1 + \infty$ der Abszissenachsen hängt die positive Halbebene des oberen Blattes mit der negativen

*) Vgl. F. Th. § 50.

Halbebene des unteren zusammen und vice versa. Längs der Abschnitte $-\infty e_3$ hängen die beiden Halbebenen eines jeden Blattes zusammen. Längs der Abschnitte $e_1 e_3$ ist die Verbindung zwischen den Halbebenen durch die Querschnitte unterbrochen.

Durch Spiegelung an dem Abschnitte $e_1 \infty$ der Abszissenachsen gelangen wir daher von der negativen Halbebene des unteren Blattes in die positive Halbebene des oberen, und durch Spiegelung an dem Abschnitt $-\infty e_3$ der Abszissenachsen gelangen wir von der einen Halbebene eines Blattes in die andere Halbebene desselben Blattes.

Fig. 27 stellt die Zuordnung der vier Halbebenen der Fläche T zu den vier Rechtecken dar, aus denen sich das Periodenparallelogramm Π zusammensetzt.*)

Fig. 27.

Wir wollen eine Folgerung, die sich aus den vorangehenden Erörterungen ergibt, besonders hervorheben:

Vorausgesetzt, daß die drei Größen e_ν reell sind, muß, wenn die beiden Größen x und s reell sind, entweder die Größe u selbst oder die Differenz $u - \omega_3$ einem reellen Wert kongruent sein.

Nehmen wir nunmehr an, es sei nur eine der drei Größen e_ν reell, die beiden anderen seien konjugiert imaginär. Wir wählen, wie dies in § 36 geschehen ist, die Bezeichnung so, daß e_2 reell und der imaginäre Bestandteil von e_1 positiv imaginär ist. Unter dieser Voraussetzung sind, wie wir a. a. O. gezeigt haben, die Halbperioden ω_1 und ω_3 konjugiert imaginär und zwar ist der reelle Bestandteil von ω_1 positiv, der imaginäre negativ imaginär. Legen wir das kanonische Querschnittsystem zu Grund, so liegen demnach die Eckpunkte des fundamentalen Periodenparallelogramms Π auf den Koordinatenachsen. Wenn wir uns so einrichten, daß die Seiten desselben geradlinig werden (vgl. die Bemerkung am Schluß des vorigen Paragraphen), so ist Π ein Rhombus, dessen Diagonalen in die Achsen fallen.

*) Bezüglich dieser Abbildungsaufgabe vgl. F. Th. § 51.

Wenn die Variable x reell ist, so ist die Größe s reell oder rein imaginär, je nachdem $x \geqq e_2$ oder $x < e_2$ ist.

Folglich werden die sich deckenden Abschnitte $+\infty e_2$ der Abszissenachsen der Fläche in die Abschnitte $0 \pm \omega_2$ der Abszissenachse der u-Ebene abgebildet; die Abschnitte $-\infty e_2$ der Abszissenachsen der Fläche T werden in die Abschnitte $0 \pm (\omega_3 - \omega_1)$ der Ordinatenachse der u-Ebene abgebildet.

Gehen wir zunächst von der Gestalt des Querschnittsystems aus, das in der nebenstehenden Figur dargestellt ist, so ist ersichtlich, daß man auf der Abszissenachse des unteren Blattes von $+\infty$ nach e_2 fortschreitend keinen Querschnitt überkreuzt. Es entspricht daher diesem Abszissenabschnitt in der u-Ebene das Stück $0\omega_2$ der Abszissenachse. Wenn man dagegen im unteren Blatt der Fläche T längs der Abszissenachse von $-\infty$ aus fortschreitet, so trifft man, bevor man den Punkt e_2 erreicht, den $-$ Rand des Querschnitts A. Daran ändert sich nichts, wenn wir zum kanonischen Querschnittsystem übergehen, nur wird der Punkt, in dem wir den Querschnitt A treffen, in unendliche Nähe des Punktes e_2 rücken. Der Wert des Integrals u in diesem Punkt ist daher

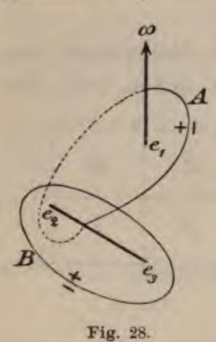


Fig. 28.

$$\omega_2 - 2\omega_1 = \omega_3 - \omega_1.$$

Der Abszissenabschnitt $-\infty e_2$ des unteren Blattes der Fläche T wird also auf die positive Ordinatenachse der u-Ebene abgebildet. Folglich wird die negative Halbebene des unteren Blattes auf den Teil des Rhombus $\overset{-}{II}$ abgebildet, der im ersten Quadranten der u-Ebene liegt.

Die nebenstehende Figur zeigt die Zuordnung der vier Halbebenen der Fläche T zu den Dreiecken, in die der Rhombus durch seine Diagonalen zerlegt wird.



Fig. 29.

Wir heben besonders hervor:

Wenn von den Größen e_ν eine reell ist, während

die beiden anderen konjugiert imaginär sind, so sind die einem reellen Wertepaar x, s entsprechenden Werte u einem reellen Wert kongruent.

§ 46. Das Umkehrproblem. Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Funktionen des Orts in der Fläche T, zu denen uns unsere bisherigen Entwicklungen geführt haben, als Funktionen der Variabeln u zu untersuchen. Bei dieser Betrachtungsweise erscheint das Normalintegral erster Gattung nicht mehr als Funktion der Variabeln x und s, sondern es sind umgekehrt diese Variabeln als Funktionen von u anzusehen. Man bezeichnet deshalb das in Rede stehende Problem als Umkehrproblem.

Um eine feste Grundlage für unsere weiteren Untersuchungen zu gewinnen, müssen wir zunächst beweisen, daß die genannten Funktionen analytische Funktionen der komplexen Variabeln u sind, und wir müssen untersuchen, welche Unstetigkeiten sie darbieten können.

Es sei F eine in der einfach zusammenhängenden Fläche T' einwertige Funktion, die nur polare Unstetigkeiten besitzt. Wir untersuchen das Verhalten der Funktion in der Umgebung eines gewöhnlichen Punktes δ der Fläche. Diesem Punkt mögen die Werte

$$x = a \qquad s = \alpha \qquad u = v$$

entsprechen. Die Funktion F ist in der Umgebung des Punktes δ eine einwertige Funktion der Variabeln x (§ 22). Weil im Punkt δ die Derivierte

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{s}$$

einen endlichen von Null verschiedenen Wert besitzt, so ist in der Umgebung dieses Punktes nicht nur u eine einwertige und reguläre Funktion der Variabeln x, sondern es kann auch umgekehrt x als einwertige und reguläre Funktion der Variabeln u betrachtet werden (F. Th. § 30). Daraus folgt:

Verhält sich F als Funktion der Variabeln x betrachtet in der Umgebung des Punktes δ regulär, so ist auch F in der Umgebung des Punktes v der u-Ebene, der dem Punkt δ entspricht, eine reguläre Funktion der Variabeln u.

Wenn die Funktion F im Punkt δ zur n-ten Ordnung Null oder unendlich wird, so wird sie auch als Funktion der Variabeln u im Punkt v zur selben Ordnung Null beziehungsweise unendlich.

In der Umgebung des Verzweigungspunktes e_ν ist F eine einwertige Funktion der Variabeln

$$(1) \qquad y = \sqrt{x - e_\nu}. \quad (\S\ 23)$$

Auch u ist in der Umgebung dieses Punktes eine einwertige Funktion der Variabeln y und die Derivierte

$$\frac{du}{dy}$$

besitzt einen von Null verschiedenen endlichen Wert. Folglich ist F in der Umgebung des Punktes ω_ν, der dem Punkt e_ν entspricht, eine einwertige Funktion der Variabeln u.

In der Umgebung des unendlich fernen Punktes ist F eine einwertige Funktion der Variabeln

$$(2) \qquad y = \sqrt{\frac{1}{x}}, \quad (\S\ 23)$$

und dasselbe gilt für u; die Derivierte

$$\frac{du}{dy}$$

besitzt einen von Null verschiedenen endlichen Wert. Daher ist F auch in der Umgebung des Nullpunktes der u-Ebene, der dem unendlich fernen Punkt der Fläche T entspricht, eine einwertige Funktion der Variabeln u.

Wir haben einen Verzweigungspunkt als Nullpunkt oder als Pol n-ter Ordnung bezeichnet, wenn F als Funktion der Variabeln y, die durch die Gleichung (1) beziehungsweise (2) definiert ist, in diesem Punkt zur n-ten Ordnung Null beziehungsweise unendlich wird. Diese Ordnungszahlen bleiben ungeändert, wenn wir an Stelle der Variabeln y u als unabhängige Variable einführen.

Damit ist bewiesen:

Soweit sich F als Funktion des Orts in der Fläche T regulär verhält, ist F auch eine reguläre analytische Funktion der Variabeln u.

Einem Nullpunkt oder Pol n-ter Ordnung in der Fläche T entspricht ein Nullpunkt beziehungsweise ein Pol derselben Ordnung in der u-Ebene.

Wir haben vorausgesetzt, F sei einwertige Funktion des Orts in der einfach zusammenhängenden Fläche T'. Folglich ist F auch für das fundamentale Periodenparallelogramm Π als einwertige Funktion der Variabeln u definiert.

Um die Funktion F für einen außerhalb dieses Parallelogramms liegenden Punkt u zu definieren, verbinden wir diesen Punkt mit dem homologen Punkt u_0 im Parallelogramm Π durch einen beliebig zu wählenden Weg Λ. Es sei

$$u_0 = u + 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3 \quad (\lambda, \mu \text{ ganze Zahlen}).$$

Der Weg Λ wird, weil er zwei homologe Punkte verbindet, in der Fläche T auf einen geschlossenen Weg L abgebildet (vgl. den vorigen Paragraphen). Es kommt nun offenbar auf dasselbe hinaus, ob wir die Funktion F in der u-Ebene vom Punkt u_0 aus längs des Weges Λ bis zum Punkt u fortsetzen, oder ob wir die analytische Fortsetzung in der Fläche T längs der Bildkurve L vornehmen. Wenn der Endwert, zu dem die Fortsetzung längs des Weges L führt, nur von den Zahlen λ und μ abhängt, im übrigen aber von der Gestalt des Weges unabhängig ist, so wird auch der Endwert, zu dem die Fortsetzung längs der Kurve Λ führt, nur vom Endpunkt dieses Weges abhängen.

Unter dieser Voraussetzung ist also F eine in der ganzen u-Ebene einwertige Funktion.

Diese Voraussetzung ist sicher erfüllt, wenn F eine rationale Funktion der Fläche T ist; es genügen ihr aber auch die Funktionen $\sigma(o)$ und $H(o)$ (§ 42), ferner genügt ihr das Integral zweiter Gattung. Alle diese Funktionen sind demnach einwertige Funktionen der Variabeln u.

Das Integral dritter Gattung $W(o/\delta)$ ist in der Fläche T' nicht einwertig und kann deshalb auch keine einwertige Funktion der Variabeln u sein. Dagegen ist die Elementarfunktion

$$P(o/\delta) = e^{W(o/\delta)} \quad (\S\ 40)$$

eine einwertige Funktion von u und daher läßt sich das In-

Wenn die Funktion F im Punkt δ zur n-ten Ordnung Nul[l] oder unendlich wird, so wird sie auch als Funktion der Va[ri]abeln u im Punkt v zur selben Ordnung Null beziehungsw[eise] unendlich.

In der Umgebung des Verzweigungspunktes e_ν ist F [eine] einwertige Funktion der Variabeln

$$(1) \qquad y = \sqrt{x - e_\nu}. \quad (\S\ 23)$$

Auch u ist in der Umgebung dieses Punktes ein[e] Funktion der Variabeln y und die Derivierte

$$\frac{du}{dy}$$

besitzt einen von Null verschiedenen endliche[n] ... ist F in der Umgebung des Punktes ω_ν, ... entspricht, eine einwertige Funktion der V...

In der Umgebung des unendlich f... eine einwertige Funktion der Variabeln

$$(2) \qquad y = \sqrt{\frac{1}{x}},$$

und dasselbe gilt für u; die Derivie...

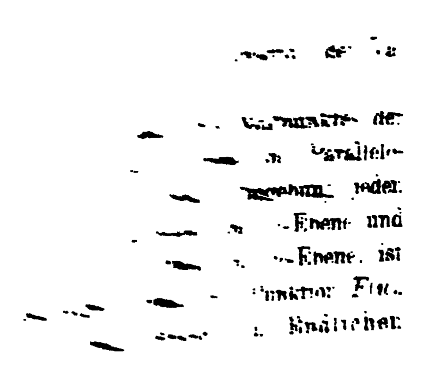
$$\frac{du}{dy}$$

besitzt einen von Null verschie... ist F auch in der Umgebun[g] ... der dem unendlich fernen Pun[kt] ... einwertige Funktion der Vari...

Wir haben einen Verzw... als Pol n-ter Ordnung be... Variabeln y, die durch d... definiert ist, in diesem Pun[kt] ... weise unendlich wird. D... wenn wir an Stelle der ... einführen.

Damit ist bewie...

Soweit sich F ... regulär verhält, i... Funktion der Va...



durch einen kongruenten, so ändern sich nur die ganzen Zahlen λ, μ.

Die einfachsten rationalen Funktionen der Fläche T, oder anders ausgedrückt die einfachsten elliptischen Funktionen sind die Größen x und s.

Wir setzen nach Weierstraß Vorgang (vgl. § 15)

(5) $$x = p(u).$$

Aus der Gleichung

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{s}$$

folgt

(6) $$s = -p'(u).$$

Die Funktion $p(u)$ genügt demnach der Differentialgleichung

(7) $$(p'(u))^2 = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3 = 4(p(u) - e_1)(p(u) - e_2)(p(u) - e_3).$$

Aus dieser Differentialgleichung ergibt sich

$$p''(u) = 6p^2(u) - \tfrac{1}{2}g_2.$$

Durch wiederholte Differentiation überzeugt man sich, daß alle Derivierten gerader Ordnung von $p(u)$ ganze Funktionen von $p(u)$ sind. Die Derivierten ungerader Ordnung lassen sich als Produkt von $p'(u)$ in eine ganze Funktion von $p(u)$ darstellen. Die Koeffizienten dieser ganzen Funktionen sind ganze Funktionen der Größen $\frac{1}{2}g_2$ und g_3 mit ganzzahligen Koeffizienten.

Die Variable x wird nur im unendlich fernen Punkt der Fläche T unendlich, folglich wird die Funktion $p(u)$ nur im Nullpunkt der u-Ebene und in den homologen Punkten unstetig. Für die Umgebung des unendlich fernen Punktes der Fläche T gilt die Reihenentwicklung (§ 32, Nr. 2)

$$u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{40}\frac{g_2}{(\sqrt{x})^5} + \frac{1}{56}\frac{g_3}{(\sqrt{x})^7} + \cdots$$

Folglich ist

$$\lim_{x=\infty} x(1 - u^2 x) = 0,$$

also auch

(8) $$\lim_{u=0} \left[p(u) - \frac{1}{u^2}\right] = 0$$

Die Funktion $p(u)$ wird demnach im Nullpunkt und in den homologen Punkten zur zweiten Ordnung unendlich.

Punkte der Fläche T, die sich decken, entsprechen demselben Wert der Variabeln x und entgegengesetzten Werten der Variabeln s und u.

Folglich ist die Funktion $p(u)$ gerade, ihre Derivierte $p'(u)$ ungerade.

Die Funktion $p'(u)$ verschwindet, wie aus der Gleichung (7) hervorgeht, in den Punkten ω_ν, die den Verzweigungspunkten e_ν entsprechen, und in den homologen Punkten, aber in keinem anderen Punkt der u-Ebene. Aus der Differentialgleichung (7) ergibt sich mit Rücksicht auf (8) für die Funktion $p(u)$ die Reihenentwicklung

$$(9) \qquad p(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{2^2 \cdot 5} \cdot u^2 + \frac{g_3}{2^2 \cdot 7} u^4 + \frac{g_2{}^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} u^6 + \cdots.$$

Wir haben im § 22 nachgewiesen, daß sich jede rationale Funktion der Fläche T als rationale Funktion der Variabeln x und s darstellen läßt. Daraus folgt:

(10) Jede elliptische Funktion läßt sich als rationale Funktion der Funktionen $p(u)$ und $p'(u)$ darstellen.

Wir schließen daraus, daß zwischen zwei elliptischen Funktionen eine algebraische Gleichung besteht.

Aus den nachgewiesenen Eigenschaften der Funktion $p(u)$ heben wir zwei hervor, durch die die Funktion vollständig bestimmt ist.

1. $p(u)$ ist eine einwertige, doppelt periodische Funktion der Variabeln u mit den Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$.
2. die Funktion $p(u)$ wird im fundamentalen Periodenparallelogramm nur im Nullpunkt unstetig und zwar in der durch die Gleichung (8) charakterisierten Weise.

Gäbe es nämlich eine zweite Funktion $f(u)$, der dieselben Eigenschaften zukämen, so müßte die Differenz

$$D = f(u) - p(u)$$

auf Grund der ersten Eigenschaft ebenfalls eine einwertige, doppelt periodische Funktion sein und wegen der zweiten Eigenschaft müßte zufolge des Satzes (3) D konstant sein

Da nun auf Grund der zweiten Eigenschaft für $u=0$ D verschwindet, so ist D identisch Null.

Der Satz, daß eine rationale Funktion der Fläche T als einwertige, doppelt periodische Funktion der Variabeln u betrachtet werden kann, ist umkehrbar. Jede einwertige Funktion $f(u)$ der Variabeln u läßt sich nämlich als eine eindeutige Funktion des Ortes in der einfach zusammenhängenden Fläche T' auffassen. Wenn die Funktion $f(u)$ die beiden Perioden $2\omega_1, 2\omega_3$ besitzt, so ist sie auch in der unzerschnittenen Fläche T einwertig; wenn sie als Funktion von u betrachtet, im Endlichen nur polare Unstetigkeiten darbietet, so besitzt sie auch als Funktion des Ortes in der Fläche T nur Pole.

Die elliptischen Funktionen können demnach auch definiert werden als einwertige, doppelt periodische Funktionen, die im Endlichen keinen wesentlich singulären Punkt besitzen.

Um zu beweisen, daß sich die beiden Begriffe vollständig decken, muß noch gezeigt werden, daß die Perioden einer elliptischen Funktion vorgeschriebene Werte annehmen können. Wir werden darauf im nächsten Abschnitt zurückkommen.

§ 48. Die Funktionen $\zeta(u)$ und $Z(u)$. Wir haben im § 33 das algebraisch normierte Integral zweiter Gattung durch die Gleichung

$$\zeta(o) = -\int \frac{x\,dx}{s} \tag{1}$$

und die Nebenbedingung bestimmt, daß im unendlich fernen Punkt

$$\lim\left[\zeta(o) - \sqrt{x}\right] = 0 \tag{2}$$

ist. Wir untersuchen nun die Funktion ζ in ihrer Abhängigkeit von der Variabeln u und bezeichnen sie demgemäß mit $\zeta(u)$.

Aus (1) folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (5) und (1) des vorigen Paragraphen

$$\zeta(u) = -\int p(u)\,du \tag{3}$$

und aus (2) folgt:

$$\lim_{u=0}\left[\zeta(u) - \frac{1}{u}\right] = 0. \tag{4}$$

Aus der Gleichung (3) ergibt sich mit Rücksicht auf die Gleichung (9) des vorigen Paragraphen für die Umgebung des Nullpunktes die Reihenentwicklung

$$(5)\qquad \zeta(u) = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} u^3 - \frac{g_3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} u^5 - \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} u^7 \cdots.$$

In dieser Reihe fehlt nicht nur das konstante Glied, sondern auch das in u multiplizierte. Wir können deshalb an Stelle der Gleichung (4) die weitergehende

$$(6)\qquad \lim_{u=0} \frac{1}{u^2}\left[\zeta(u) - \frac{1}{u}\right] = 0$$

treten lassen.

Die Gleichung (5) zeigt, daß die Funktion $\zeta(u)$ ungerade ist. Es ergibt sich dies auch aus der früher (§ 33) nachgewiesenen Eigenschaft der Funktion $\zeta(o)$, daß sie in sich deckenden Punkten der Fläche T' entgegengesetzt gleiche Werte annimmt.

Beschreibt der Punkt o in der Fläche T eine in sich zurücklaufende Kurve L, die den Querschnitt A oder den Querschnitt B von der + Seite zur − Seite hin überschreitet, so wächst das Integral $u(o)$ um $2\omega_1$ beziehungsweise $2\omega_3$, das Integral $\zeta(o)$ um $2\eta_1$ beziehungsweise $2\eta_3$ (§ 37). Der Kurve L entspricht in der u-Ebene eine Kurve, die vom Punkt u zum Punkt $u + 2\omega_1$ beziehungsweise $u + 2\omega_3$ führt. Folglich ist

$$(7)\qquad \zeta(u + 2\omega_1) = \zeta(u) + 2\eta_1, \qquad \zeta(u + 2\omega_3) = \zeta(u) + 2\eta_3.$$

Die Gleichung (4) im Zusammenhalt mit der vorstehenden zeigt, daß die Funktion $\zeta(u)$ im Nullpunkt und in den homologen Punkten zur ersten Ordnung unendlich wird.

Die Funktion $\zeta(u)$ ist durch die beiden folgenden Eigenschaften vollständig bestimmt:

1. die Funktion $\zeta(u)$ ist eine einwertige Funktion der Variabeln u, die den beiden Funktionalgleichungen (7) genügt.
2. die Funktion $\zeta(u)$ wird im fundamentalen Periodenparallelogramm nur im Nullpunkt unstetig und zwar in der durch die Gleichung (6) charakterisierten Weise.

Aus der ersten Eigenschaft folgt nämlich, daß die Deri-

vierte $\zeta'(u)$ eine elliptische Funktion mit den Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$ ist und aus der zweiten Eigenschaft folgt, daß

$$\zeta'(u) + p(u) = 0$$

und

$$\lim_{u=0} \left[\zeta(u) - \frac{1}{u}\right] = 0$$

ist (vgl. den vorigen Paragraphen).

Das transzendent normierte Integral zweiter Gattung (§ 37)

$$Z(o) = \zeta(o) - \frac{\eta_1}{\omega_1} u(o)$$

ist am Querschnitt A stetig, am Querschnitt B ist

$$Z(\overset{+}{o}) - Z(\overset{-}{o}) = -\frac{\pi i}{\omega_1}.$$

Als Funktion der Variabeln u betrachtet ist daher das transzendent normierte Integral zweiter Gattung

$$Z(u) = \zeta(u) - \frac{\eta_1}{\omega_1} u$$

eine einwertige periodische Funktion mit der Periode $2\omega_1$; diese Funktion genügt überdies der Gleichung

$$Z(u + 2\omega_3) = Z(u) - \frac{\pi i}{\omega_1}.$$

Ihre Unstetigkeiten stimmen mit denen der Funktion $\zeta(u)$ überein.

§ 49. Die Funktionen $\sigma(u)$ und $H(u)$. Wir haben im § 42 die Funktion $\sigma(o)$ durch die Gleichung (4)

$$\log \sigma(o) = -\int \zeta \frac{dx}{s} \tag{1}$$

und die Nebenbedingung (5)

$$\lim \frac{\sigma(o)}{u(o)} = 1 \tag{2}$$

im unendlich fernen Punkt bestimmt und wir haben nachgewiesen: die Funktion $\sigma(o)$ ist in der einfach zusammenhängenden Fläche T' einwertig und überall stetig. Sie verschwindet nur im unendlich fernen Punkt der Fläche.

Setzen wir die Funktion $\sigma(o)$ längs eines in sich zurücklaufenden Weges fort, der den Querschnitt A oder den Quer-

schnitt B von der $+$ Seite zur $-$ Seite hin überschreitet, so besteht zwischen dem Anfangswert $\sigma(o)$ und dem Endwert $\sigma^*(o)$ die Beziehung (§ 43, Nr. 3 und 4)

$$(3) \qquad \sigma^*(o) = -e^{2\eta_\nu[u,o)+\omega_\nu]}\sigma(o).$$

Dem Querschnitt A entspricht der Index $\nu = 1$, dem Querschnitt B der Index $\nu = 3$.

Wir betrachten nun σ als Funktion der Variabeln u und schreiben demgemäß $\sigma(u)$ an Stelle von $\sigma(o)$. Die Funktion $\sigma(u)$ ist einwertig und wird im Endlichen nirgends unstetig. Die Funktion $\sigma(u)$ ist also eine ganze transzendente Funktion der Variabeln u.

Aus den Gleichungen (1), (2) und (3) folgt:

$$(4) \qquad \log \sigma(u) = \int_e^{\to} \zeta(u)du,$$

$$(5) \qquad \lim_{u=0} \frac{\sigma(u)}{u} = 1,$$

$$(6) \qquad \sigma(u + 2\omega_\nu) = -e^{2\eta_\nu(u+\omega_\nu)}\sigma(u) \qquad \nu = 1,3.$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$(7) \quad \sigma(u+2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3) = (-1)^{\lambda\mu+\lambda+\mu}e^{2(\lambda\eta_1+\mu\eta_3)(u+\lambda\omega_1+\mu\omega_3)}\sigma(u).$$

λ, μ bedeuten beliebige ganze Zahlen.

Die Funktion $\sigma(u)$ verschwindet im Nullpunkt und in den zu ihm homologen Punkten, aber in keinem anderen im Endlichen liegenden Punkt der u-Ebene. Als ganze transzendente Funktion läßt sich $\sigma(u)$ durch eine Potenzreihe darstellen, die für alle endlichen Werte von u konvergiert (F. Th., § 26). Die Koeffizienten der Reihe können wir von der Differentialgleichung (4)

$$\sigma'(u) = \zeta(u)\sigma(u)$$

ausgehend mittelst der Methode des unbestimmten Koeffizienten berechnen. Wir erhalten bei Berücksichtigung der Gleichung (5) (vgl. Gl. (5) des vorigen Paragraphen):

$$(8) \qquad \sigma(u) = u - \frac{g_2 u^5}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{g_3 u^7}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{g_2^2 u^9}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} \cdots$$

Diese Reihenentwicklung läßt weder die charakteristischen Eigenschaften der Funktion $\sigma(u)$ klar hervortreten, noch ist

sie zur numerischen Rechnung geeignet, außer wenn der absolute Betrag von u sehr klein ist. Im folgenden Abschnitt werden wir zu Darstellungen der Funktion $\sigma(u)$ gelangen, die in beiden Beziehungen nichts zu wünschen übrig lassen.

Wir haben im § 42 der Funktion $\sigma(o)$ eine etwas allgemeinere Funktion $\sigma(o/\delta)$ an die Seite gestellt, die ebenfalls in der Fläche T' einwertig und überall stetig ist. Diese Funktion verschwindet auch nur in einem Punkt der Fläche T, nämlich in dem beliebig zu wählenden Punkt δ. In diesem Punkt ist (§ 42, Nr. 11)

$$\lim \frac{\sigma(o/\delta)}{u(o) - u(\delta)} = 1. \tag{9}$$

Die Gleichungen, die das Verhalten der Funktion $\sigma(o/\delta)$ an den Querschnitten charakterisieren, gehen aus den für $\sigma(o)$ geltenden hervor, wenn man im Exponenten des Periodizitätsfaktors $u(o)$ durch $u(o) - u(\delta)$ ersetzt (§ 42, Nr. 12).

Wir setzen $\sigma(\delta) = v$ und beweisen, daß die Funktion $\sigma(o/\delta)$ mit der Funktion $\sigma(u - v)$ identisch ist. Zu dem Zweck bemerken wir zunächst, daß die Funktion $\sigma(u - v)$ als Funktion des Orts in der Fläche T betrachtet dieselben Periodizitätseigenschaften besitzt wie die Funktion $\sigma(o/\delta)$. Der Quotient

$$\frac{\sigma(o/\delta)}{\sigma(u - v)}$$

bleibt daher an den Querschnitten stetig und ist folglich eine elliptische Funktion. Weil er in der Fläche T' nirgends unendlich wird, ist er eine Konstante und diese Konstante hat wegen (5) und (9) den Wert 1.

Aus der Gleichung (10) des § 42 erhalten wir für die Elementarfunktion

$$S(o/\delta) = e^{w(o/\delta) - \zeta(\delta)[u(o) - u(\delta)]} \quad (\S\ 40,\ \text{Nr. } 6)$$

den Ausdruck

$$S(o/\delta) = \frac{\sigma(u - v)\,\sigma(v)}{\sigma(u)}. \tag{10}$$

Wir fassen die Größen S, ζ und w als Funktionen der Größen

$$u = u(o) \quad \text{und} \quad v = u(\delta)$$

auf und erhalten

$$w(u/v) = \log \sigma(u - v) - \log \sigma(u) + \log \sigma(v) + \zeta(v)(u - v) + \\ + \text{einem Multiplum von } 2\pi i$$

Das algebraisch normierte Integral dritter Gattung läßt sich somit durch den Logarithmus der σ-Funktion und die ζ-Funktion ausdrücken. Auch die Funktionen $p(u)$ und $\zeta(u)$ lassen sich leicht auf die σ-Funktion zurückführen. Es ist nämlich (4)

$$\zeta(u) = \frac{d \log \sigma(u)}{du} \tag{11}$$

und aus der Gleichung (3) des vorigen Paragraphen folgt

$$p(u) = -\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2}. \tag{12}$$

Es lassen sich somit, wenn man das Normalintegral erster Gattung als unabhängige Variable einführt, die rationalen Funktionen der Fläche T und ihre Integrale mittelst einer einzigen Transzendenten $\sigma(u)$ ausdrücken.

Den für die σ-Funktion gültigen Formeln können wir analoge auf die H-Funktion bezügliche an die Seite stellen.

Wir setzen im Einklang mit der Gleichung (14) des § 42

$$H(u) = c e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1} u^2} \sigma(u) \tag{13}$$

und erhalten wegen der Gleichungen (1) und (2) des § 43 die Gleichungen

$$H(u + 2\omega_1) = -H(u), \tag{14}$$

$$H(u + 2\omega_3) = -e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u + \omega_3)} H(u) \tag{15}$$

und hieraus

$$H(u + 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3) = (-1)^{\lambda+\mu} e^{-\frac{\mu\pi i}{\omega_1}(u + \mu\omega_3)} H(u). \tag{16}$$

Die Transzendente $H(u)$ hat Jacobi entdeckt; an ihrer Stelle hat Weierstraß die Transzendente $\sigma(u)$ eingeführt.

§ 50. Partialbruchzerfällung einer elliptischen Funktion. Wir haben im § 26 eine rationale Funktion der Fläche T in Partialbrüche zerfällt. Dieses Verfahren könnten wir leicht auf die Partialbruchzerfällung einer elliptischen Funktion übertragen; wir kommen aber noch schneller auf dem direkten Wege zum Ziel.

Nehmen wir an, die elliptische Funktion $F(u)$ werde im Punkt v unstetig wie die Funktion

$$(1) \qquad \frac{c_{-1}}{u-v} + \frac{c_{-2}}{(u-v)^2} \cdots + \frac{c_{-m}}{(u-v)^m}.$$

Der erste Koeffizient c_{-1} ist das Residuum der Funktion $F(u)$ für den Punkt v.

Nun wird die Funktion $\zeta(u-v)$ im Punkte v unstetig wie die Funktion

$$\frac{1}{u-v} \quad (\S\ 48,\ \text{Nr. } 4)$$

und ihre μ-te Derivierte

$$\frac{d^\mu \zeta(u-v)}{du^\mu} = \zeta^{(\mu)}(u-v) = -\, p^{(\mu-1)}(u-v)$$

wird daher unstetig wie die Funktion

$$\frac{(-1)^\mu \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \mu}{(u-v)^{\mu+1}}.$$

Folglich wird die Funktion

$$(2) \quad \Phi(u/v) = c_{-1}\zeta(u-v) + c_{-2}p(u-v) - \frac{c_{-3}}{1 \cdot 2} p'(u-v) \cdots + $$
$$+ (-1)^{m-2} \frac{c_{-m}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} p^{(m-2)}(u-v)$$

im Punkt v in derselben Weise wie die Funktion (1) und die rationale Funktion $F(u)$ unstetig.

Die Funktion $\Phi(u/v)$ ist eine einwertige Funktion der Variabeln u. Sie genügt den Gleichungen

$$(3) \quad \Phi(u + 2\omega_\nu/v) = \Phi(u/v) + c_{-1} \cdot 2\eta_\nu \quad \nu = 1, 2, 3 \ (\S 48,\ \text{Nr.} 7)$$

Bezeichnen wir mit $v_1, v_2 \ldots v_n$ die Unstetigkeitspunkte der Funktion $F(u)$ im fundamentalen Periodenparallelogramm. Für jeden dieser Punkte bilden wir eine Funktion

$$(4) \quad \Phi(u/v_\mu) = c_{-1}^{(\mu)}\zeta(u-v_\mu) + c_{-2}^{(\mu)}p(u-v_\mu) - \frac{c_{-3}^{(\mu)}}{1 \cdot 2}p'(u-v_\mu) \ldots$$
$$\mu = 1, 2 \ldots n$$

Die Differenz

$$(5) \qquad D(u) = F(u) - \Phi(u/v_1) - \Phi(u/v_2) \cdots - \Phi(u/v_n)$$

ist eine einwertige Funktion der Variabeln u, die im fundamentalen Periodenparallelogramm nirgends unstetig wird. Sie genügt, wie aus (3) hervorgeht, der Gleichung

$$(6)\qquad D(u+2\omega_\nu)=D(u)+\sum_{\mu=1}^{n}c_{-1}^{(\mu)}\eta_\nu\quad(\nu=1,3).$$

Ihre Derivierte ist eine elliptische Funktion, die im Periodenparallelogramm nirgends unstetig wird, also eine Konstante (§ 47, Nr. 3). Folglich ist

$$D(u)=au+b,$$

wo a, b Konstante bedeuten. Aus (6) folgt nun

$$a\cdot 2\omega_\nu=\sum_{\mu=1}^{n}c_{-1}^{(\mu)}\eta_\nu.$$

Im Zusammenhalt mit der Legendreschen Relation (§ 37 Nr. 3) zeigt diese Gleichung, daß die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{n}c_{-1}^{(\mu)}=0$$

ist.

Die Summe der Residuen einer elliptischen Funktion, die zu den im fundamentalen Periodenparallelogramm liegenden Unstetigkeitspunkten gehören, verschwindet.

Wegen $a=0$ ist die Differenz D konstant und aus (5) folgt

$$(7)\qquad F(u)=\Phi(u/v_1)+\Phi(u/v_2)\cdots+\Phi(u/v_n)+b.$$

Diese Gleichung stellt die verlangte Partialbruchzerfällung der Funktion $F(u)$ dar. Wir wollen einen Spezialfall dieser Zerfällung besonders anmerken. Wenn die Funktion $F(u)$ nur im Nullpunkt und den zu ihm homologen Punkten unstetig wird, so lautet die Partialbruchzerfällung

$$(8)\qquad F(u)=b+c_{-2}p(u)-\frac{c_{-3}}{1\cdot 2}p'(u)\cdots+$$
$$+(-1)^{m-2}\frac{c_{-m}}{1\cdot 2\ldots(m-1)}p^{(m-2)}(u).$$

Unter Benutzung der Partialbruchzerfällung können wir nun leicht das Integral einer elliptischen Funktion durch die

Funktionen $\sigma(u)$, $\zeta(u)$ und $p(u)$ ausdrücken. Aus den Gleichungen (4) und (7) folgt

$$\int F(u)\,du = \sum_{\mu=1}^{n} \Big[c_{-1}^{(\mu)} \log \sigma(u - v_\mu) - c_{-2}^{(\mu)} \zeta(u - v_\mu) - \\ - \frac{c_{-3}^{(\mu)}}{1 \cdot 2} p(u - v_\mu) \cdots \Big] + bu + \text{Konst.}$$

§ 51. Bestimmung einer elliptischen Funktion durch ihre Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte. Die elliptische Funktion n-ter Ordnung $F(u)$ verschwinde in den Punkten $u_1, u_2 \ldots u_n$ und in den homologen Punkten zur ersten Ordnung und sie werde in den Punkten $v_1, v_2 \ldots v_n$ und in den homologen Punkten zur ersten Ordnung unendlich. Zufolge des Abelschen Theorems (§ 41) besteht die Beziehung

$$(1) \quad (u_1 + u_2 \cdots + u_n) - (v_1 + v_2 \cdots + v_n) = 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3,$$

wo λ, μ ganze Zahlen bedeuten.

Die Entwicklungen der §§ 41 und 49 ergeben für die Funktion $F(u)$ die Darstellung

$$(2) \quad F(u) = \text{Konst.}\; e^{(2\lambda\eta_1 + 2\mu\eta_3)u} \frac{\sigma(u - u_1)\,\sigma(u - u_2) \ldots \sigma(u - u_n)}{\sigma(u - v_1)\,\sigma(u - v_2) \ldots \sigma(u - v_n)},$$

die sich leicht direkt verifizieren läßt.

Die Punkte $u_1, u_2 \ldots u_n$ und die Punkte $v_1, v_2 \ldots v_n$ brauchen nicht alle untereinander verschieden zu sein: es kann sich eine beliebige Anzahl derselben zu einem Nullpunkt beziehungsweise einem Unstetigkeitspunkt höherer Ordnung vereinigen.

Wir haben früher bewiesen (§ 47, Nr. 10), daß sich jede elliptische Funktion rational durch die Funktionen $p(u)$ und $p'(u)$ ausdrücken läßt. Diese Darstellung wollen wir nun ausführen. Wir setzen

$$(3) \quad u_{n+1} = -(u_1 + u_2 \cdots + u_n) \quad v_{n+1} = -(v_1 + v_2 \cdots + v_n)$$

und bestimmen zwei elliptische Funktionen $M(u)$ und $N(u)$ durch die beiden folgenden Bedingungen:

die beiden Funktionen $M(u)$ und $N(u)$ werden im Nullpunkt zur $(n+1)$-ten Ordnung unendlich;

die Funktion $M(u)$ verschwindet in den Punkten $u_1, u_2 \ldots u_{n+1}$ zur ersten Ordnung, die Funktion $N(u)$ in den Punkten $v_1, v_2 \ldots v_{n+1}$.

Diese Bestimmungen sind zulässig, weil die Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte der beiden Funktionen den Bedingungen des Abelschen Theorems genügen. Die Punkte u_{n+1} und v_{n+1} sind zufolge (1) homolog. Folglich bleibt der Quotient

$$\frac{M(u)}{N(u)}$$

in diesen Punkten stetig. Er bleibt auch im Nullpunkt stetig und hat somit dieselben Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte wie die Funktion $F(u)$. Er kann sich deshalb von dieser Funktion nur um eine multiplikative Konstante unterscheiden (§ 47, Nr. 3).

Weil die Funktion $M(u)$ nur im Nullpunkt und zwar zur $n+1$-ten Ordnung unstetig wird, so läßt sie sich in der Form

$$M(u) = b + c_{-2}p(u) - \frac{c_{-3}}{1\cdot 2}p'(u) \cdots + (-1)^{n-1}\frac{c_{-n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}p^{(n-1)}(u)$$

darstellen (Nr. 8 des vorigen Paragraphen). Wir bringen zum Ausdruck, daß diese Funktion in den Punkten $u_1, u_2 \ldots u_n$ verschwindet, und erhalten:

$$(4)\quad M(u) = \text{Konst.}\begin{vmatrix} 1\, p(u) & p'(u) & \ldots p^{(n-1)}(u) \\ 1\, p(u_1) & p'(u_1) & \ldots p^{(n-1)}(u_1) \\ 1\, p(u_2) & p'(u_2) & \ldots p^{(n-1)}(u_2) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1\, p(u_n) & p'(u_n) & \ldots p^{(n-1)}(u_n) \end{vmatrix}$$

$$= \text{Konst.}\, D_{n+1}(u, u_1, u_2 \ldots u_n).$$

Daß die Funktion $M(u)$ auch im Punkt u_{n+1} verschwindet, folgt aus dem Abelschen Theorem.

Drücken wir die Derivierten höherer Ordnung der Funktion $p(u)$ durch $p(u)$ und $p'(u)$ aus (vgl. die Bemerkung § 47 unter (7)), so erhalten wir eine Darstellung der Funktion $M(u)$ als ganze rationale Funktion von $p(u)$ und $p'(u)$.

Die Darstellung (4) gilt nur für den Fall, daß die Größen $u_1, u_2 \ldots u_n$ untereinander verschieden sind. Wäre etwa $u_2 = u_1$, so hätte man die Elemente in der dritten Zeile der Determinante D_{n+1} beziehungsweise durch

$$0 \quad p'(u_1) \quad p''(u_1) \ldots p^{(n)}(u_1)$$

zu ersetzen, wie sich durch einen einfachen Grenzübergang ergibt.

Für die gegebene Funktion $F(u)$ erhalten wir nun die Darstellung

$$F(u) = \text{Konst.}\, \frac{D_{n+1}(u, u_1, u_2 \ldots u_n)}{D_{n+1}(u, v_1, v_2 \ldots v_n)}.$$

Die Modifikation, die diese Darstellung erfährt, wenn eine Anzahl von Nullpunkten oder von Unstetigkeitspunkten in den Nullpunkt der u-Ebene rücken, ist leicht zu übersehen.

Wir gelangen zu einer bemerkenswerten Formel, wenn wir die Funktion $D_{n+1}(u, u_1, u_2 \ldots u_n)$ durch σ-Funktionen ausdrücken.

Zu dem Zweck lassen wir in der Gleichung (2) an Stelle von n $n+1$ treten und setzen $v_1 = v_2 \cdots = v_n = v_{n+1} = 0$.

Der Vergleich von (1) und (3) zeigt, daß die Zahlen λ, μ, die in (2) vorkommen, gleich Null zu setzen sind. Wir erhalten

$$(5) \qquad \begin{aligned} &D_{n+1}(u, u_1, u_2 \ldots u_n) = \\ &= C \frac{\sigma(u - u_1)\, \sigma(u - u_2) \ldots \sigma(u - u_n)\, \sigma(u + u_1 + u_2 \cdots + u_n)}{\sigma^{n+1}(u)}. \end{aligned}$$

Die Größe C ist von u unabhängig, hängt aber von den Größen $u_1, u_2 \ldots u_n$ ab. Die Determinante D_{n+1} (4) ändert nur ihr Vorzeichen, wenn wir zwei der Größen $u, u_1, u_2 \ldots u_n$ vertauschen, dasselbe muß daher auch für die rechte Seite der Gleichung (5) gelten. Wir wollen das zum Ausdruck bringen; wir setzen

$$(6) \quad \varphi_{n+1}(u, u_1, u_2 \ldots u_n) = \frac{\sigma(u + u_1 + u_2 \cdots + u_n) \prod\limits_{\lambda, \mu} \sigma(u_\lambda - u_\mu)}{\sigma^{(n+1)}(u)\, \sigma^{(n+1)}(u_1)\, \sigma^{n+1}(u_2) \ldots \sigma^{n+1}(u_n)}$$

$$(\lambda, \mu = 0, 1, 2 \ldots n; \quad \lambda < \mu; \quad u_0 = u)$$

und erhalten

$$(7) \qquad D_{n+1}(u, u_1, u_2 \ldots u_n) = c_{n+1}\, \varphi_{n+1}(u, u_1, u_2 \ldots u_n)$$
$$(n = 1, 2, 3 \ldots).$$

D_1 und φ_1 sind $= 1$ zu setzen, es ist also

$$(8) \qquad c_1 = 1.$$

Die Funktion φ_{n+1} unterscheidet sich von der rechten Seite der Gleichung (5) nur um einen von u unabhängigen Faktor, folglich ist c_{n+1} ebenso wie C von u unabhängig.

Wenn wir die Größe u mit einer der Größen $u_1 u_2 \dots u_n$ vertauschen, so ändern die Funktionen D_{n+1} und φ_{n+1} nur ihr Vorzeichen, folglich ist c_{n+1} auch von den Größen $u_1 u_2 \cdots u_n$ unabhängig; c_{n+1} ist also eine rein numerische Konstante.

Wegen

$$\lim_{u=0} u^{n+1} p^{(n-1)}(u) = (-1)^{n-1} n!$$

ist (4)

$$\lim_{u_n=0} u_n^{n+1} D_{n+1}(u, u_1, u_2, \dots u_n) = (-1)^{n-1} n! D_n(u, u_1, u_2, \dots u_{n-1})$$

und wegen

$$\lim \frac{\sigma(u)}{u} = 1$$

ist (6)

$$\lim_{u_n=0} u_n^{n+1} \varphi_{n+1}(u, u_1, u_2, \dots u_n) = \varphi_n(u, u_1, u_2, \dots u_{n-1}).$$

Substituieren wir diese Werte in (7), so folgt

$$(-1)^{n-1} n! D_n(u, u_1, u_2, \dots u_{n-1}) = c_{n+1} \varphi_n(u, u_1, u_2, \dots u_{n-1}).$$

Ersetzen wir dagegen in (7) n durch $n-1$, so folgt

$$D_n(u, u_1, u_2, \dots u_{n-1}) = c_n \varphi_n(u, u_1, u_2, \dots u_{n-1}).$$

Folglich ist

$$c_{n+1} = (-1)^{n-1} n! c_n$$

also wegen (8)

$$c_{n+1} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} 1!\, 2!\, 3! \dots n! \tag{9}$$

§ 52. Additionstheoreme der Funktionen $\zeta(u)$ und $p(u)$. In der Gleichung (7) des vorigen Paragraphen setzen wir $n = 1$, $u_1 = v$.

Es folgt mit Rücksicht auf (4), (6) und (9)

$$\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)} = p(v) - p(u) \tag{1}$$

eine Gleichung, die sich leicht auf direktem Weg verifizieren läßt.

Wir differenzieren logarithmisch nach u und erhalten (§ 49, Nr. 11)

$$\zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta(u) = \frac{p'(u)}{p(u) - p(v)}. \tag{2}$$

Durch Vertauschung von u und v erhalten wir daraus

$$\zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta(v) = -\frac{p'(v)}{p(u) - p(v)}. \tag{3}$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt

$$(4)\quad \begin{cases} \zeta(u+v) - \zeta(u) - \zeta(v) = \frac{1}{2}\frac{p'(u)-p'(v)}{p(u)-p(v)} \\ \zeta(u-v) - \zeta(u) + \zeta(v) = \frac{1}{2}\frac{p'(u)+p'(v)}{p(u)-p(v)}. \end{cases}$$

Den Inhalt dieser Gleichungen bezeichnet man als Additionstheorem der ζ-Funktion.

Differenzieren wir die Gleichungen (2) und (3) nach u, so folgt (§ 49, Nr. 11 und 12)

$$(5)\quad p(u+v) + p(u-v) - 2p(u) = \frac{(p'(u))^2}{[p(u)-p(v)]^2} - \frac{p''(u)}{p(u)-p(v)},$$

$$(6)\qquad p(u+v) - p(u-v) = -\frac{p'(u)p'(v)}{[p(u)-p(v)]^2}.$$

Aus (5) folgt, wenn wir u und v vertauschen

$$(7)\quad p(u+v) + p(u-v) - 2p(v) = \frac{(p'(v))^2}{[p(u)-p(v)]^2} + \frac{p''(v)}{p(u)-p(v)}.$$

Wir addieren diese Gleichung zu (5) und bemerken, daß (§ 47, Nr. 7)

$$\frac{p''(u)-p''(v)}{p(u)-p(v)} = 6\frac{p^2(u)-p^2(v)}{p(u)-p(v)} = 6[p(u)+p(v)]$$

ist.

Wir erhalten nach Division durch 2

$$p(u+v) + p(u-v) = \frac{1}{2}\frac{(p'(u))^2+(p'(v))^2}{[p(u)-p(v)]^2} - 2p(u) - 2p(v).$$

Aus dieser Gleichung im Zusammenhalt mit der Gleichung (6) folgt das Additionstheorem der p-Funktion

$$(8)\qquad p(u \pm v) = \frac{1}{4}\left[\frac{p'(u) \mp p'(v)}{p(u)-p(v)}\right]^2 - p(u) - p(v).$$

Wir erhalten eine bemerkenswerte Spezialisierung der Gleichung (7), wenn wir

$$v = \omega_\nu \,(\nu = 1, 2, 3)$$

setzen.

Es ist

$$p(\omega_\nu) = e_\nu \quad p'(\omega_\nu) = 0 \quad p''(\omega_\nu) = 2(e_\nu - e_\lambda)(e_\nu - e_\mu).$$

λ, μ bedeuten die beiden von ν verschiedenen Indizes aus der Reihe 1, 2, 3.

Wegen

$$p(u-\omega_\nu) = p(u+\omega_\nu)$$

ergibt sich

$$(9) \qquad [p(u+\omega_\nu)-e_\nu][p(u)-e_\nu] = (e_\nu - e_\lambda)(e_\nu - e_\mu).$$

§ 53. Multiplikation der Funktion $p(u)$. Aus der Identität (7) des § 51 wollen wir eine für den Grenzfall

$$u = u_1 = u_2 \ldots = u_n$$

gültige Formel ableiten. Der beabsichtigten Anwendungen wegen erscheint es zweckmäßig den Index n durch $n-1$ zu ersetzen.

Die in Rede stehende Idendität lautet:

$$(1) \quad \begin{cases} D_n(u, u_1, u_2, \ldots u_{n-1}) = \\ (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} 1!\,2!\,3! \ldots (n-1)!\, \varphi_n(u, u_1, u_2, \ldots u_{n-1}). \end{cases}$$

Wir dividieren beide Seiten dieser Gleichung durch $u-u_1$ und lassen dann diese Differenz gegen Null konvergieren; beide Seiten der Gleichung, die wir erhalten, dividieren wir durch $(u-u_2)^2$ und lassen dann $u-u_2$ gegen Null konvergieren usw. Um die Grenzübergänge übersichtlich darstellen zu können, führen wir einige abkürzende Bezeichnungen ein. Wir setzen

$$(2) \quad D_n^{(\nu)} = \begin{vmatrix} 1 & p(u) & p'(u) & \ldots & p^{(n-2)}(u) \\ \cdot & p'(u) & p''(u) & \ldots & p^{(n-1)}(u) \\ \cdot & p''(u) & p'''(u) & \ldots & p^{(n)}(u) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & p^{(\nu-1)}(u) & p^{(\nu)}(u) & \ldots & p^{(n+\nu-3)}(u) \\ 1 & p(u_\nu) & p'(u_\nu) & \ldots & p^{(n-2)}(u_\nu) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & p(u_{n-1}) & p'(u_{n-1}) & \ldots & p^{(n-2)}(u_{n-1}) \end{vmatrix} \quad \nu = 1, 2, \ldots n$$

$$(3) \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} p'(u) & p''(u) & \ldots & p^{(n-1)}(u) \\ p''(u) & p'''(u) & \ldots & p^{(n)}(u) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p^{(n-1)}(u) & p^{(n)}(u) & \ldots & p^{(2n-3)}(u) \end{vmatrix}.$$

Wie leicht zu sehen ist, ist

$$(4) \quad D_n^{(1)} = D_n \quad (\S\, 51\ (4)) \quad \text{und} \quad D_n^{(n)} = \Delta_n.$$

Zwischen den Größen $D_n^{(\nu)}$ und $D_n^{(\nu+1)}$ besteht die Beziehung

$$(5)\qquad \lim_{u_\nu = u} \frac{D_n^{(\nu)}}{(u-u_\nu)^\nu} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} D_n^{(\nu+1)}.$$

Der Beweis ergibt sich sofort, wenn man die Elemente der ν-ten Zeile der Determinante $D_n^{(\nu)}$ nach Potenzen von $u_\nu - u$ entwickelt.

Wir setzen ferner

$$(6)\quad \varphi_n^{(\nu)} = \frac{\sigma(\nu u + u_\nu + u_{\nu+1} \cdots u_{n-1}) \prod_{\lambda\mu} \sigma(u_\lambda - u_\mu) \left[\prod_{\varkappa} \sigma(u - u_\varkappa)\right]^\nu}{\sigma^{\nu n}(u)\, \sigma^n(u_\nu)\, \sigma^n(u_{\nu+1}) \cdots \sigma^n(u_{n-1})}$$

$(\lambda, \mu = \nu, \nu+1, \ldots n-1; \quad \lambda < \mu; \quad \varkappa = \nu, \nu+1, \ldots n-1)$.

Insbesondere ist

$$(7)\qquad \varphi_n^{(1)} = \varphi_n \text{ (§ 51, (6)) und } \varphi_n^{(n)} = \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)}.$$

Aus der Definition der Funktion $\varphi_n^{(\nu)}$ ergibt sich

$$(8)\qquad \lim_{u_\nu = u} \frac{\varphi_n^{(\nu)}}{(u-u_\nu)^\nu} = \varphi_n^{(\nu+1)}.$$

Aus den Gleichungen (1), (5) und (8) folgt nun

$$(9)\qquad \begin{gathered} D_n^{(\nu)} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+\frac{1}{2}\nu(\nu-1)} \times \\ \times [1!\,2!\ldots(\nu-1)!]^2\, \nu!\,(\nu+1)!\ldots(n-1)!\, \varphi_n^{(\nu)} \; (\nu = 1, 2, \ldots n). \end{gathered}$$

Insbesondere ergibt sich für $\nu = n$ mit Rücksicht auf (4) und (7)

$$(10)\qquad \Delta_n = (-1)^{n-1}[1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!]^2 \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)}.$$

Die Funktion

$$f(u) = \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)}$$

ist eine elliptische Funktion, denn sie läßt sich als ganze Funktion der Derivierten $p'(u)\, p''(u) \ldots p^{2(n-3)}(u)$ der Funktion $p(u)$ darstellen (3).

Diese Funktion wird im fundamentalen Periodenparallelogramm nur im Nullpunkt unstetig und zwar zur Ordnung $n^2 - 1$. Denn für $u = 0$ ist

$$(11)\qquad \lim u^{n^2-1} f(u) = \lim \frac{\sigma(nu)}{u} \cdot \lim \left[\frac{u}{\sigma(u)}\right]^{n^2} = n.$$

Die Funktion $\sigma(nu)$ verschwindet, wenn u einer Gleichung der Form

(12) $$nu = 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3$$

genügt, wo λ, μ ganze Zahlen bedeuten.

Im Nullpunkt der u-Ebene und in den zu ihm homologen Punkten wird die Funktion $f(u)$ unendlich, in den übrigen Nullpunkten von $\sigma(nu)$ verschwindet auch die Funktion $f(u)$ und zwar ebenfalls zur ersten Ordnung.

Wenn die Zahl n ungerade ist, lassen sich die Nullpunkte der Funktion $f(u)$, die dem fundamentalen Periodenparallelogramm angehören, in $\frac{1}{2}(n^2-1)$ Paare ordnen

$$u = \pm \frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}$$

$(\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1)$ ausgenommen $\lambda = 0\ \mu = 0)$.

In diesen Punkten verschwindet auch die Funktion

(13) $$G_{\frac{1}{2}(n^2-1)}(p(u)) = \prod_{\lambda,\mu}\left[p(u) - p\left(\frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right)\right].$$

Diese Funktion wird ebenso wie $f(u)$ im Nullpunkt der u-Ebene zur n^2-1-ten Ordnung unendlich und zwar ist

(14) $$\lim u^{n^2-1} G_{\frac{1}{2}(n^2-1)} = 1.$$

Die Funktionen $f(u)$ und $G_{\frac{1}{2}(n^2-1)}(p(u))$ können sich folglich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden (vgl. die Bemerkung zu § 47, Nr. 3); wegen (11) und (14) ist dieser Faktor $= n$. Wir erhalten demnach (10)

(15) $$\frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)} = \frac{\Delta_n}{[1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!]^2} = n\,G_{\frac{1}{2}(n^2-1)}(p(u))$$

für ungerade n.

Wenn die Zahl n gerade ist, so gehören zu den Nullpunkten der Funktion $f(u)$ (12) auch die Punkte

(16) $$\omega_1 \quad \omega_2 = \omega_1 + \omega_3 \quad \omega_3.$$

Diese Punkte sind beziehungsweise zu den Punkten $-\omega_1$ $-\omega_2$ $-\omega_3$ homolog.

Die übrigen $n^2 - 4$ Nullpunkte der Funktion lassen sich wieder in Paare ordnen:

$$(17) \qquad \pm \frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}$$

$$\left(\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots \frac{n-2}{2}, \text{ ausgenommen } \lambda = 0 \;\; \mu = 0\right).$$

In den Punkten (16) verschwindet die Funktion $p'(u)$, in den Punkten (17) die Funktion

$$(18) \qquad G_{\frac{1}{2}(n^2-4)}(p(u)) = \prod_{\lambda,\mu} \left[p(u) - p\left(\frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right)\right].$$

Im Nullpunkt der u-Ebene ist

$$(19) \qquad \lim u^3 p'(u) = -2, \quad \lim u^{\frac{1}{2}(n^2-4)}\, G_{\frac{1}{2}(n^2-4)} = 1.$$

Aus den oben angeführten Gründen ist daher

$$(20) \qquad \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)} = -\frac{\Delta_n}{[1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!]^2} = -\frac{n}{2} p'(u)\, G_{\frac{1}{2}(n^2-4)}(p(u)).$$

für gerade n.

Weil Δ_n eine ganze Funktion der Derivierten der Funktion $p(u)$ mit ganzzahligen Koeffizienten ist, so lassen sich die Koeffizienten der beiden ganzen Funktionen

$$G_{\frac{1}{2}(n^2-1)} \quad \text{und} \quad G_{\frac{1}{2}(n^2-4)}$$

als ganze Funktionen der Größen $\frac{1}{4}g_2$ und g_3 mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen (vgl. die Bemerkung zu § 47, Nr. 7).

Wir benutzen die vorangehenden Entwicklungen um die Funktion $p(nu)$ rational durch die Funktion $p(u)$ auszudrücken. Die Funktion

$$(21) \qquad F(u) = p(u) - p(nu)$$

wird unendlich zur zweiten Ordnung in den Punkten, die der Gleichung

$$u = 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3$$

genügen, wo λ, μ ganze Zahlen bedeuten. Das sind die Nullpunkte der Funktion $\sigma(nu)$.

Die Funktion $F(u)$ verschwindet zur ersten Ordnung in den Punkten, die der Gleichung

$$nu = \pm u + 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3$$

genügen. Hier bedeuten λ und μ ganze Zahlen, die nur nicht beide durch n teilbar sein dürfen. Diese Punkte fallen mit den Nullpunkten der beiden Funktionen

$$\frac{\sigma((n+1)u)}{\sigma(u)} \quad \text{und} \quad \frac{\sigma((n-1)u)}{\sigma(u)}$$

zusammen. Die Funktion

$$(22) \qquad F_1(u) = \frac{\sigma((n+1)u)\,\sigma((n-1)u)}{\sigma^2(nu)\,\sigma^2(u)} = \frac{1}{n^2}\frac{\Delta_{n+1}\,\Delta_{n-1}}{\Delta_n^2} \quad (10)$$

besitzt somit dieselben Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte wie die Funktion $F(u)$ und da sie ebenfalls eine elliptische Funktion ist, kann sie sich von $F(u)$ nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Daß dieser Faktor $= 1$ ist, ergibt sich aus den Gleichungen

$$\lim_{u=0} u^2 F(u) = \lim_{u=0} u^2 F_1(u) = 1 - \frac{1}{n^2} \quad (21)\text{ u. }(22).$$

Wir erhalten demnach

$$(23) \quad p(u) - p(nu) = \frac{\sigma((n+1)u)\,\sigma((n-1)u)}{\sigma^2(nu)\,\sigma^2(u)} = \frac{1}{n^2}\frac{\Delta_{n+1}\,\Delta_{n-1}}{\Delta_n^2}.$$

Substituieren wir die Werte (15) und (18) so folgt

$$(24)\, p(u) - p(nu) = \begin{cases} \dfrac{n^2-1}{n^2}\,\dfrac{\frac{1}{4}(p'(u))^2\, G_{\frac{1}{2}(n+3)(n-1)}(p(u))\, G_{\frac{1}{2}(n-3)(n+1)}(p(u))}{\left[G_{\frac{1}{2}(n^2-1)}(p(u))\right]^2} \\ \qquad\qquad (n \text{ ungerade}) \\ \dfrac{n^2-1}{n^2}\,\dfrac{G_{\frac{1}{2}n(n+2)}(p(u))\, G_{\frac{1}{2}n(n-2)}(p(u))}{\frac{1}{4}(p'(u))^2\left[G_{\frac{1}{2}(n^2-4)}(p(u))\right]^2} \quad (n \text{ gerade}). \end{cases}$$

Die hier auftretenden Funktionen Δ_ν und G_ν sind durch die Gleichungen (3), (15) und (20) erklärt.

Die Darstellung von $p(nu)$ als rationale Funktion von $p(u)$, die durch die vorstehende Gleichung geleistet wird, bezeichnet man als „Multiplikation" der Funktion $p(u)$. Betrachtet man nicht $p(u)$ sondern $p(nu)$ als gegeben, so erscheint $p(u)$ als Wurzel einer algebraischen Gleichung vom Grade $n^2 - 1$ und man bezeichnet unter dieser Voraussetzung die Gleichung (24) als „Teilungsgleichung". Auf die Theorie dieser Gleichungen werden wir später ausführlich zurückkommen.

§ 54. Elliptische Funktionen, deren n-te Wurzel eine einwertige Funktion der Variabeln u ist. Wir haben früher gesehen, daß es rationale Funktionen der Fläche T gibt, deren n-te Wurzel in der einfach zusammenhängenden Fläche T' einwertig ist (§ 41). Diese Funktionen können wir nunmehr auch als elliptische Funktionen definieren, deren n-te Wurzel eine einwertige Funktion der Variabeln u ist. Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen geben uns die Mittel an die Hand, derartige Funktionen rational durch $p(u)$ und $p'(u)$ auszudrücken.

In den Gleichungen (2) und (6) des vorigen Paragraphen setzen wir $\nu = n - 1$ und schreiben v an Stelle von u und u an Stelle von u_{n-1}. Wir setzen, eine neue abkürzende Bezeichnung einführend

$$
(1)\quad D_n^{(n-1)} = (-1)^n \begin{vmatrix} p(u)-p(v) & p'(u)-p'(v) & \dots & p^{(n-2)}(u)-p^{(n-2)}(v) \\ p'(v) & p''(v) & \dots & p^{(n-1)}(v) \\ p''(v) & p'''(v) & \dots & p^{(n)}(v) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p^{(n-2)}(v) & p^{(n-1)}(v) & \dots & p^{(2n-4)}(v) \end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^n [1!\,2!\,3!\dots(n-1)!]^2 F_n(u/v).
$$

Die Gleichung (6) des vorigen Paragraphen lautet nunmehr

$$
(2)\qquad \varphi_n^{(n-1)} = \frac{\sigma(u+(n-1)v)\,\sigma^{n-1}(v-u)}{\sigma^{n(n-1)}(v)\,\sigma^n(u)}.
$$

Aus der Gleichung (9) des vorigen Paragraphen folgt sodann mit Rücksicht darauf, daß die Funktion $\sigma(u)$ ungerade ist

$$
(3)\qquad F_n(u/v) = -\frac{\sigma(u+(n-1)v)\,\sigma^{n-1}(u-v)}{\sigma^{n(n-1)}(v)\,\sigma^n(u)}.
$$

Nun setzen wir, unter λ, μ ganze Zahlen verstehend, die nicht beide durch n teilbar sind

$$
(4)\qquad v = \frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}.
$$

Aus der Gleichung (§ 49, Nr. 7)

$$
\sigma(u+2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3) = (-1)^{\lambda\mu+\lambda+\mu} e^{2(\lambda\eta_1+\mu\eta_3)(u+\lambda\omega_1+\mu\omega_3)}\sigma(u)
$$

folgt, wenn wir u durch $u-v$ ersetzen mit Rücksicht auf (4)

$$
\sigma(u+(n-1)v) = (-1)^{\lambda\mu+\lambda+\mu} e^{(\lambda\eta_1+\mu\eta_3)(2u+(n-2)v)}\sigma(u-v).
$$

Substituieren wir diesen Wert in (3), so folgt

$$(5)\quad F_n(u/v) = (-1)^{(\lambda+1)(\mu+1)} e^{(\lambda\eta_1+\mu\eta_3)(2u+(n-2)v)} \left[\frac{\sigma(u-v)}{\sigma^{n-1}(v)\,\sigma(u)}\right]^n.$$

Indem wir die n-te Wurzel ausziehen, erhalten wir

$$(6)\quad \Phi_{\lambda\mu}(u) = \sqrt[n]{F_n(u/v)} = \varepsilon\cdot e^{\frac{1}{n}(\lambda\eta_1+\mu\eta_3)(2u+(n-2)v)}\,\frac{\sigma(u-v)}{\sigma^{n-1}(v)\,\sigma(u)}.$$

ε bedeutet eine $2n$-te Einheitswurzel, die der Gleichung

$$\varepsilon^n = (-1)^{(\lambda+1)(\mu+1)}$$

genügen muß, im übrigen aber beliebig gewählt werden kann.

Die Funktion $\Phi_{\lambda\mu}(u)$ ist eine einwertige Funktion der Variabeln u, die im Periodenparallelogramm nur einen Nullpunkt und nur einen Unstetigkeitspunkt besitzt.

Aus den Periodizitätseigenschaften der σ-Funktion folgt die Gleichung

$$\frac{\Phi_{\lambda\mu}(u+2\omega_\nu)}{\Phi_{\lambda\mu}(u)} = e^{\frac{4}{n}(\lambda\eta_1+\mu\eta_3)\omega_\nu - 2\eta_\nu v}\quad \nu = 1, 3.$$

Aus der Legendreschen Relation folgt mit Rücksicht auf (4), daß der Exponent der Exponentialgröße rechts den Wert

$$-\mu\cdot\frac{2\pi i}{n}\quad \text{oder den Wert}\quad +\lambda\cdot\frac{2\pi i}{n}$$

besitzt, je nachdem $\nu = 1$ oder $= 3$ ist. Es ist demnach

$$(7)\quad \begin{cases} \Phi_{\lambda\mu}(u+2\omega_1) = e^{-\mu\frac{2\pi i}{n}}\,\Phi_{\lambda\mu}(u) \\ \Phi_{\lambda\mu}(u+2\omega_3) = e^{\lambda\frac{2\pi i}{n}}\,\Phi_{\lambda\mu}(u) \\ \Phi_{\lambda\mu}(u+2\omega_2) = e^{(\lambda-\mu)\frac{2\pi i}{n}}\,\Phi_{\lambda\mu}(u). \end{cases}$$

Die Funktionen $\Phi_{\lambda\mu}(u)$ ändern sich somit um eine n-te Einheitswurzel, wenn u um eine Periode wächst, was übrigens schon daraus folgt, daß ihre n-te Potenz doppelt periodisch ist.

Wegen dieser Periodizitätseigenschaft genügt es, n^2-1 verschiedene von den Funktionen $\Phi_{\lambda\mu}(u)$ in Betracht zu ziehen, etwa diejenigen, die den Indizeswerten

$$\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots n-1 \quad \text{ausgenommen} \quad \lambda = 0 \;\; \mu = 0$$

entsprechen. Diese $n^2 - 1$ Funktionen lassen sich rational durch zwei derselben — etwa die Funktionen $\Phi_{10}(u)$ und $\Phi_{01}(u)$ — und die Funktionen $p(u)$ und $p'(u)$ ausdrücken. Aus den Gleichungen (7) folgt nämlich, daß der Quotient

$$Q(u) = \frac{\Phi_{\lambda\mu}(u)}{[\Phi_{10}(u)]^\mu [\Phi_{01}(u)]^\lambda}$$

die Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_3$ besitzt; dieser Quotient läßt sich also rational durch die Funktionen $p(u)$ und $p'(u)$ ausdrücken.

In dem einfachsten Fall $n = 2$ sind die drei Indizespaare

$$\lambda = 1 \;\; \mu = 0 \quad \lambda = 1 \;\; \mu = 1 \quad \lambda = 0 \;\; \mu = 1$$

und dementsprechend die drei Werte (4)

$$v = \omega_1 \quad v = \omega_2 \quad v = \omega_3$$

in Betracht zu ziehen. Die Gleichung (1) liefert in diesem Falle den Ausdruck

$$F_2(u/v) = p(u) - p(v) = p(u) - e_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

und aus (6) folgt, wenn wir $\varepsilon = -1$ setzen, was zulässig ist

$$\sqrt{p(u) - e_\nu} = -e^{\eta_\nu u} \frac{\sigma(u - \omega_\nu)}{\sigma(\omega_\nu)\sigma(u)}. \tag{8}$$

Wir setzen nach Weierstraß Vorgang

$$\sqrt{p(u) - e_\nu} = \frac{\sigma_\nu(u)}{\sigma(u)} \tag{9}$$

und erhalten zur Definition der drei Funktionen $\sigma_\nu(u)$ unter Berücksichtigung der Gleichung

$$\sigma(u + 2\omega_\nu) = -e^{2\eta_\nu(u+\omega_\nu)} \sigma(u)$$

die Doppelgleichungen

$$\sigma_\nu(u) = e^{\eta_\nu u} \frac{\sigma(\omega_\nu - u)}{\sigma(\omega_\nu)} = e^{-\eta_\nu u} \frac{\sigma(\omega_\nu + u)}{\sigma(\omega_\nu)}. \tag{10}$$

§ 55. Die Funktionen $\sigma_\nu(u)$, $H(u)$ und $\Theta(u)$. Die Funktion $\sigma_\nu(u)$ ist wie die Funktion $\sigma(u)$ eine ganze transzendente Funktion, die nur in einem Punkt der Periodenparallelogramms verschwindet. Sie ist, wie die Schlußgleichung

des vorigen Paragraphen zeigt, eine gerade Funktion. Im Nullpunkt der u-Ebene nimmt sie den Wert 1 an.

Aus der Gleichung (9) des vorigen Paragraphen ergeben sich die Gleichungen

$$\sigma_\nu^2(u) - \sigma_\mu^2(u) = (e_\mu - e_\nu)\,\sigma^2(u) \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3 \tag{1}$$

$$p'(u) = -2\,\frac{\sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\,\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}. \tag{2}$$

Das Vorzeichen auf der rechten Seite der letzten Gleichung ergibt sich aus der Bemerkung, daß

$$\lim_{u=0} u^3 p'(u) = -2$$

ist.

Die Periodizitätseigenschaften der Funktionen $\sigma_\nu(u)$ ergeben sich ohne weiteres aus denen der Funktion $\sigma(u)$. Aus der Gleichung (10) des vorigen Paragraphen folgt:

$$\left\{\begin{aligned}
\sigma_1(u + 2\omega_1) &= -\,e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma_1(u)\\
\sigma_1(u + 2\omega_2) &= e^{2\eta_2(u+\omega_2)}\sigma_1(u)\\
\sigma_1(u + 2\omega_3) &= e^{2\eta_3(u+\omega_3)}\sigma_1(u)\\
\sigma_2(u + 2\omega_1) &= e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma_2(u)\\
\sigma_2(u + 2\omega_2) &= -\,e^{2\eta_2(u+\omega_2)}\sigma_2(u)\\
\sigma_2(u + 2\omega_3) &= e^{2\eta_3(u+\omega_3)}\sigma_2(u)\\
\sigma_3(u + 2\omega_1) &= e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma_3(u)\\
\sigma_3(u + 2\omega_2) &= e^{2\eta_2(u+\omega_2)}\sigma_3(u)\\
\sigma_3(u + 2\omega_3) &= -\,e^{2\eta_3(u+\omega_3)}\sigma_3(u).
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Man kann diese Gleichungen in die beiden folgenden zusammenfassen:

$$\left\{\begin{aligned}
\sigma_\lambda(u + 2\omega_\lambda) &= -\,e^{2\eta_\lambda(u+\omega_\lambda)}\sigma_\lambda(u) \qquad & \lambda, \nu = 1, 2, 3\\
\sigma_\lambda(u + 2\omega_\nu) &= e^{2\eta_\nu(u+\omega_\nu)}\sigma_\lambda(u) \qquad & \lambda \neq \nu.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Wir haben früher der Funktion $\sigma(u)$ die Funktion

$$H(u) = c\,e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2}\sigma(u) \quad (\S\ 49,\ \text{Nr. } 13) \tag{5}$$

an die Seite gestellt. Wir wollen nun Funktionen einführen, die zu den Funktionen $\sigma_\nu(u)$ in analoger Beziehungen stehen, wie die Funktion $H(u)$ zur Funktion $\sigma(u)$.

Aus (5) folgt (s. die Schlußgleichung des vorigen Paragraphen)

$$\sigma_\nu(u) = e^{-\eta_\nu u} \cdot \frac{e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}(u+\omega_\nu)^2} H(u+\omega_\nu)}{e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}\omega_\nu^2} H(\omega_\nu)}$$

und hieraus

$$\sigma_\nu(u) = e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} e^{\frac{\eta_1\omega_\nu - \eta_\nu\omega_1}{\omega_1}u} \frac{H(u+\omega_\nu)}{H(\omega_\nu)} \qquad \nu = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Der Quotient

$$\frac{\eta_1\omega_\nu - \eta_\nu\omega_1}{\omega_1}$$

verschwindet für $\nu = 1$; für $\nu = 2$ und $\nu = 3$ hat er auf Grund der Legendreschen Relation den Wert

$$\frac{\pi i}{2\omega_1}.$$

Wir setzen nun, unter α, β Konstante verstehend, über die sofort verfügt werden wird,

$$H_1(u) = H(u + \omega_1) \tag{7}$$

$$\Theta_1(u) = \alpha \cdot e^{\frac{\pi i}{2\omega_1}u} H(u + \omega_2). \tag{8}$$

$$\Theta(u) = \beta \,.\, e^{\frac{\pi i}{2\omega_1}u} H(u + \omega_3). \tag{9}$$

Unter Benutzung dieser Bezeichnungen können wir den Gleichungen (6) die Form geben

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_1(u) &= e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \frac{H_1(u)}{H_1(0)} \\ \sigma_2(u) &= e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \frac{\Theta_1(u)}{\Theta_1(0)} \\ \sigma_3(u) &= e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}. \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Die Funktionen H_1, Θ_1 und Θ sind ebenso wie die Funktionen σ_ν gerade Funktionen, während H ebenso wie σ eine ungerade Funktion ist.

Aus den für die Funktion $H(u)$ geltenden Gleichungen (§ 49, Nr. 14 und 15)

$$(11) \quad H(u+2\omega_1) = -H(u) \quad H(u+2\omega_3) = -e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_3)} H(u)$$

ergeben sich die Gleichungen (s. (7), (8) und (9))

$$(12) \quad H_1(u+2\omega_1) = -H_1(u) \quad H_1(u+2\omega_3) = e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_3)} H_1(u)$$

$$(13) \quad \Theta_1(u+2\omega_1) = \Theta_1(u) \qquad \Theta_1(u+2\omega_3) = e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_3)} \Theta_1(u)$$

$$(14) \quad \Theta(u+2\omega_1) = \Theta(u) \qquad \Theta(u+2\omega_3) = -e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_3)} \Theta(u).$$

Die vier Funktionen H, H_1, Θ, Θ_1 genügen also Relationen der Form

$$f(u+2\omega_1) = \pm f(u) \quad f(u+2\omega_3) = \pm e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_3)} f(u).$$

Über die Konstanten $\alpha\,\beta$ die in den Gleichungen (8) und (9) vorkommen, wollen wir nun so verfügen, daß die zwischen den vier Funktionen bestehenden Beziehungen eine möglichst symmetrische Gestalt annehmen.

Ersetzen wir in (9) die Variable u durch $u+\omega_1$, so folgt mit Rücksicht auf (8)

$$\Theta(u+\omega_1) = i\beta e^{\frac{\pi i}{2\omega_1}u} H(u+\omega_2) = i\frac{\beta}{\alpha}\Theta_1(u).$$

Wir setzen $\beta = -i\alpha$ und erhalten die der Gleichung (7) entsprechende Gleichung

$$(15) \qquad \Theta_1(u) = \Theta(u+\omega_1).$$

Sodann ersetzen wir in (9) die Variable u durch $u+\omega_3$ und erhalten mit Rücksicht auf (11)

$$\Theta(u+\omega_3) = -i\alpha e^{\frac{\pi i}{2\omega_1}(u+\omega_3)} H(u+2\omega_3) = i\alpha e^{-\frac{\pi i}{2\omega_1}(u+\omega_3)} H(u).$$

Setzen wir

$$\alpha = e^{\frac{\pi i \omega_3}{4\omega_1}}$$

so erhalten wir die beiden in Beziehung auf die Funktionen H und Θ symmetrischen Gleichungen

$$(16) \qquad \begin{cases} \Theta(u) = -ie^{\frac{\pi i}{4\omega_1}(2u+\omega_3)} H(u+\omega_3) \\ H(u) = -ie^{\frac{\pi i}{4\omega_1}(2u+\omega_3)} \Theta(u+\omega_3). \end{cases}$$

Wir stellen die Relationen zwischen den Funktionen H, H_1, Θ, Θ_1 übersichtlich zusammen.

$$
(17) \quad \begin{cases} H_1(u) = H(u + \omega_1) \\ \Theta(u) = -\, i e^{\frac{\pi i}{4\omega_1}(2u + \omega_3)} H(u + \omega_3) \\ \Theta_1(u) = \Theta(u + \omega_1) = e^{\frac{\pi i}{4\omega_1}(2u + \omega_3)} H(u + \omega_2) \end{cases}
$$

$$
(18) \quad \begin{cases} H(u) = -\, i e^{\frac{\pi i}{4\omega_1}(2u + \omega_3)} \Theta(u + \omega_3) \\ H_1(u) = H(u + \omega_1) = e^{\frac{\pi i}{4\omega_1}(2u + \omega_3)} \Theta(u + \omega_2) \\ \Theta_1(u) = \Theta(u + \omega_1). \end{cases}
$$

Die entsprechenden Relationen zwischen den Funktionen $\sigma \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ sind erheblich weniger übersichtlich.

Die Funktionen $\sigma(u)$ und $H(u)$ verschwinden, wenn

$$u = 0$$

ist. Aus der Definition der Funktionen $\sigma_\nu(u)$ (Schlußgleichung des vorigen Paragraphen) ergeben sich die Nullpunkte dieser Funktionen und der Funktionen H_1 Θ Θ_1. Wir stellen sie in einer kleinen Tabelle zusammen

(19)

	Nullpunkte
$\sigma(u)$ und $H(u)$	$u \equiv 0$
$\sigma_1(u)$ und $H_1(u)$	$u \equiv \omega_1$
$\sigma_2(u)$ und $\Theta_1(u)$	$u \equiv \omega_2$
$\sigma_3(u)$ und $\Theta(u)$	$u \equiv \omega_3$

§ 56. Elliptische Funktionen zweiter und dritter Art. Die Funktionen σ σ_ν H und Θ haben die charakteristische Eigenschaft gemein, daß sie Relationen der Form

$$
(1) \qquad f(u + 2\omega_\nu) = e^{a_\nu (u + \omega_\nu) + b_\nu} f(u) \qquad \nu = 1, 3
$$

genügen. Dieselbe Figenschaft kommt auch der allgemeineren Funktion zu

$$
(2) \qquad T(u) = e^{\alpha u^2 + \beta u + \gamma} H(u - u_1) H(u - u_2) \ldots H(u - u_n),
$$

wo $\alpha \beta \gamma u_1 u_2 \ldots u_n$ Konstante bedeuten.

Auch der Quotient zweier Funktionen der Form $T(u)$ hat dieselbe Eigenschaft. Man dehnt die Bezeichnung „elliptische

Funktionen" auch auf derartige Funktionen aus: man bezeichnet eine einwertige Funktion der Variabeln u, die im Endlichen keinen wesentlich singulären Punkt besitzt, als „elliptische Funktion dritter Art", wenn sie den Relationen (1) genügt.

In dem besonderen Fall, daß die Größen a_1 und a_3 verschwinden, die Periodizitätsfaktoren sich also auf Konstante reduzieren, bezeichnet man die Funktion als „elliptische Funktion zweiter Art". Die doppelt periodischen Funktionen, für die auch die Konstanten b_1 und b_3 verschwinden, unterscheidet man als „elliptische Funktionen erster Art", oder auch als elliptische Funktionen im engeren Sinn. Wenn im folgenden von elliptischen Funktionen ohne weiteres die Rede ist, so sind immer solche von der ersten Art gemeint.

Die Konstanten a_1 und a_3 sind nicht voneinander unabhängig.

Ersetzen wir die Variable u in der ersten der Gleichungen (1) durch $u + 2\omega_3$, in der zweiten durch $u + 2\omega_1$, so müssen wir, weil die Funktion $f(u)$ nach Voraussetzung einwertig ist, denselben Wert erhalten. Es muß demnach

$$a_1 \omega_3 - a_3 \omega_1 = n\pi i \tag{3}$$

sein, wo n eine ganze Zahl bedeutet.

Eine elliptische Funktion dritter Art besitzt in jedem Periodenparallelogramm gleichviel Nullpunkte und gleichviel Unstetigkeitspunkte, denn sie ändert sich beim Übergang von einem Periodenparallelogramm zum andern nur um einen Faktor, der weder Null noch unendlich wird.

Eine elliptische Funktion dritter Art, die im Endlichen nirgends unstetig wird, bezeichnen wir nach H. Webers Vorgang als T-Funktion, die Anzahl der Nullpunkte, die sie im Periodenparallelogramm besitzt, wird als ihre Ordnung bezeichnet.

Eine T-Funktion der Ordnung Null ist eine Exponentialfunktion der Form

$$e^{\alpha u^2 + \beta u + \gamma} \tag{4}$$

wo $\alpha\beta\gamma$ Konstante bedeuten.

Wenn nämlich die Funktion $T(u)$ im Endlichen weder Null noch unendlich wird, so ist die Funktion $\log T(u)$ im

Endlichen überall einwertig und stetig. Die zweite Derivierte des Logarithmus ist, wie aus den Bedingungsgleichungen (1 hervorgeht, eine doppelt periodische Funktion, also da sie im Periodenparallelogramm nicht unstetig wird, eine Konstante.

Jede T-Funktion n-ter Ordnung läßt sich in der Form (2) darstellen.

Bezeichnen wir nämlich mit $u_1 u_2 \dots u_n$ die Nullpunkte der Funktion im fundamentalen Periodenparallelogramm, so ist der Quotient

$$\frac{T(u)}{H(u-u_1)\,H(u-u_2)\dots H(u-u_n)}$$

eine T-Funktion der Ordnung Null, also eine Funktion der Form (4).

In derselben Art kann man zeigen, daß sich jede elliptische Funktion dritter Art als Quotient von zwei T-Funktionen darstellen läßt. Haben diese beiden T-Funktionen dieselbe Ordnung, so ist der Quotient eine elliptische Funktion zweiter Art und umgekehrt läßt sich jede elliptische Funktion zweiter Art als Quotient zweier T-Funktionen derselben Ordnung darstellen.

Aus der Darstellung (2) der T-Funktionen ergibt sich eine Relation zwischen ihren Nullpunkten und den Konstanten $a_1 a_3 b_1 b_3$. Mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$H(u-u_\lambda+2\omega_1) = -H(u-u_\lambda)$$

$$H(u-u_\lambda+2\omega_3) = -e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u-u_\lambda+\omega_3)}H(u-u_\lambda)$$

folgt aus (2)

$$\log T(u+2\omega_1) - \log T(u) = n\pi i + 4\alpha\omega_1(u+\omega_1) + 2\beta\omega_1 + 2m_1\pi i$$

$$\log T(u+2\omega_3) - \log T(u) = n\pi i - n\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_3) + \frac{\pi i}{\omega_1}\sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda + 4\alpha\omega_3(u+\omega_3) + 2\beta\omega_3 + 2m_3\pi i.$$

Hier bedeuten m_1 und m_3 nicht näher bestimmte ganze Zahlen.

Der Vergleich mit (1) gibt nach einer leichten Rechnung

$$a_1 = 4\alpha\omega_1. \tag{5}$$

$$(6) \qquad a_3 = -n\frac{\pi i}{\omega_1} + 4\alpha\omega_3.$$

$$(7) \qquad b_1 = (2m_1 + n)\pi i + 2\beta\omega_1.$$

$$(8) \qquad b_3 = (2m_3 + n)\pi i + \frac{\pi i}{\omega_1}\sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda + 2\beta\omega_3.$$

Aus (5) und (6) folgt

$$(9) \qquad a_1\omega_3 - a_3\omega_1 = n\pi i.$$

Die in der Gleichung (3) auftretende ganze Zahl n ist also, wenn es sich um T-Funktionen handelt, gleich der Ordnungszahl. Im Fall der allgemeinen elliptischen Funktion dritter Art ist n die Differenz zwischen der Anzahl der Nullpunkte und der Unstetigkeitspunkte im Periodenparallelogramm. Aus (7) und (8) folgt

$$(10) \quad \frac{1}{\pi i}(b_1\omega_3 - b_3\omega_1) = (2m_1 + n)\omega_3 - (2m_3 + n)\omega_1 - \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda.$$

Wenn die Nullpunkte der T-Funktion gegeben sind, so bleiben die Konstanten $\alpha\beta\gamma$, von denen der Exponentialfaktor abhängt, verfügbar. Wir können sie so wählen, daß

erstens die Konstante $a_1 = 0$ ist, und daß

zweitens die Quotienten $b_1/\pi i$ und $b_3/\pi i$ reell sind.

Die erste Bedingung erfordert

$$(11) \qquad \alpha = 0 \qquad (5).$$

Aus (6) folgt dann

$$(12) \qquad a_3 = -n\frac{\pi i}{\omega_1}.$$

Bezüglich der zweiten Bedingung ist zu bemerken:

Weil der Quotient ω_3/ω_1 nicht reell ist, so kann jede komplexe Größe in der Form $g_1\omega_1 + g_3\omega_3$ dargestellt werden, wo g_1 und g_3 reelle Größen bedeuten. Man kann demnach der Gleichung (10) durch zwei reelle Größen

$$(13) \qquad g_1 = -\frac{b_1}{\pi i} \qquad g_3 = -\frac{b_3}{\pi i}$$

genügen, und zwar sind diese Größen eindeutig bestimmt.

Nachdem die Größen b_1 und b_3 bestimmt sind, ergibt sich der Wert von β aus einer der beiden Gleichungen (7) oder (8).

Die speziellen T-Funktionen, deren Periodizitätsfaktoren den in Rede stehenden Bedingungen genügen, bezeichnet man als „ϑ-Funktionen“.

Für die ϑ-Funktionen erhalten also die Gleichungen (1) die Gestalt ((12) und (13))

$$(14)\qquad \begin{cases} \vartheta(u + 2\omega_1) = e^{-g_1 \pi i}\vartheta(u) \\ \vartheta(u + 2\omega_3) = e^{-g_3 \pi i} e^{-n\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_3)}\vartheta(u). \end{cases}$$

Die Größen g_1, g_3 bezeichnet man als „Charakteristik“ der ϑ-Funktion. Die Periodizitätseigenschaften der ϑ-Funktion erfahren keine Änderung, wenn man die Zahlen g_1 und g_3 um gerade ganze Zahlen ändert; man betrachtet deshalb zwei Charakteristiken, die sich nur in dieser Weise unterscheiden, als nicht wesentlich verschieden.

Man fügt häufig die Charakteristik dem Funktionszeichen als Index an und schreibt $\vartheta_{g_1 g_3}(u)$ statt $\vartheta(u)$.

Die Funktionen H, H_1, Θ, Θ_1, mit denen wir uns im vorigen Paragraphen beschäftigt haben, sind ϑ-Funktionen erster Ordnung. Wir stellen ihre Charakteristiken übersichtlich zusammen (vgl. die Gl. (11) bis (14) des vorigen Paragraphen).

(15)

	H	H_1	Θ	Θ_1
g_1	1	1	0	0
g_3	1	0	1	0

Der Quotient zweier ϑ-Funktionen von gleicher Ordnung und Charakteristik ist eine doppelt periodische Funktion. Wir ziehen daraus den Schluß:

Haben zwei ϑ-Funktionen von gleicher Ordnung und Charakteristik alle Nullpunkte bis auf einen gemein, so haben sie auch den letzten gemein und unterscheiden sich nur um eine multiplikative Konstante. Denn andernfalls wäre ihr Quotient eine doppeltperiodische Funktion erster Ordnung und eine solche gibt es nicht.

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt weiter:

Zwischen $n+1$ ϑ-Funktionen der Ordnung n, $\vartheta^{(1)}(u), \vartheta^{(2)}(u) \ldots \vartheta^{(n)}(u), \vartheta^{(n+1)}(u)$, die dieselbe Charakteristik besitzen, besteht eine lineare Relation

$$c_1\vartheta^{(1)}(u) + c_2\vartheta^{(2)}(u) \cdots + c_n\vartheta^{(n)}(u) + c_{n+1}\vartheta^{(n+1)}(u) = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $c_1, c_2 \ldots c_n, c_{n+1}$, die nicht sämtlich verschwinden.

Zum Beweis setzen wir

$$f(u) = c_1 \vartheta^{(1)}(u) + c_2 \vartheta^{(2)}(u) \cdots + c_n \vartheta^{(n)}(u)$$

und bestimmen die Verhältnisse der Konstanten $c_1, c_2 \ldots c_n$ derart, daß die Funktionen $f(u)$ und $\vartheta^{(n+1)}(u)$ $n-1$ Nullpunkte gemein haben.

Es kann der Fall eintreten, daß die Funktion $f(u)$ identisch verschwindet; alsdann besteht schon zwischen den Funktionen $\vartheta^{(1)}(u), \vartheta^{(2)}(u) \ldots \vartheta^{(n)}(u)$ eine Relation der verlangten Art. Ist das nicht der Fall, so ist der Quotient

$$\frac{f(u)}{\vartheta^{(n+1)}(u)} = \text{einer Konstanten} - c_{n+1}.$$

Multipliziert man eine ϑ-Funktion von der Ordnung n und der Charakteristik $g_1 g_3$ mit einer ϑ-Funktion von der Ordnung n' und der Charakteristik $g'_1 g_3'$, so ist das Produkt wieder eine ϑ-Funktion. Ihre Ordnung ist $n + n'$, ihre Charakteristik $g_1 + g'_1$, $g_3 + g'_3$.

Der Beweis ergibt sich ohne weiteres aus der Gleichung (14).

Wir sind übereingekommen, zwei Charakteristiken $g_1 g_3$ und $g'_1 g'_3$ als nicht wesentlich verschieden zu betrachten, wenn die Differenzen $g_1 - g'_1$, $g_3 - g_3'$ gerade ganze Zahlen sind. Dieser Übereinkunft zufolge besitzt das Produkt von zwei ϑ-Funktionen, die beide eine der vier Charakteristiken

$$(1,1) \qquad (1,0) \qquad (0,1) \qquad (0,0)$$

besitzen, ebenfalls eine dieser Charakteristiken. Wir können daher aus den vier Funktionen H, H_1, Θ, Θ_1 ϑ-Funktionen von beliebig hoher Ordnung zusammensetzen, denen eine der vier genannten Charakteristiken zukommt.

Es ist nicht schwer zu beweisen, daß man auf diese Weise alle ϑ-Funktionen mit dieser Charakteristik darstellen kann. Wir gehen darauf nicht ein, sondern beschränken uns darauf, die Tragweite der im vorausgehenden bewiesenen Sätze durch einige Beispiele zu erläutern.

Die Quadrate der Funktionen H, H_1, Θ, Θ_1 sind von der zweiten Ordnung und sie besitzen die Charakteristik (0,0). Es

muß deshalb zwischen je drei von diesen Quadraten eine lineare Relation stattfinden.

Wir können demnach die Gleichung

$$c_1 H^2(u) + c_2 H_1^2(u) = \Theta^2(u)$$

ansetzen, wo $c_1\, c_2$ Konstante bedeuten.

Für $u = 0$ verschwindet $H(u)$, für $u = \omega_1$ verschwindet $H_1(u)$ (§ 55, Nr. 19). Wir erhalten deshalb

$$c_2 = \frac{\Theta^2(0)}{H_1^2(0)} \qquad c_1 = \frac{\Theta^2(\omega_1)}{H^2(\omega_1)} = \frac{\Theta_1^2(0)}{H_1^2(0)} \quad \text{(§ 55, Nr. 17).}$$

Substituieren wir diese Werte, so folgt

$$\Theta_1^2(0) H^2(u) + \Theta^2(0) H_1^2(u) = H_1^2(0)\Theta^2(u). \tag{16}$$

Ersetzen wir in dieser Gleichung u durch $u + \omega_3$, so folgt (§ 55, Nr. 17 und 18)

$$H_1^2(0)\, H^2(u) + \Theta^2(0)\Theta_1^2(u) = \Theta_1^2(0)\Theta^2(u). \tag{17}$$

Bilden wir, unter v einen verfügbaren Parameter verstehend, das Produkt

$$f(u) = H(u+v)\,\Theta(u-v).$$

Aus den Gleichungen (11) und (14) des vorigen Paragraphen ergeben sich die Gleichungen

$$f(u + 2\omega_1) = -f(u) \quad f(u + 2\omega_3) = e^{-2\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_3)} f(u).$$

Die Funktion $f(u)$ ist somit eine ϑ-Funktion zweiter Ordnung mit der Charakteristik (1,0). Dieselbe Ordnung und Charakteristik besitzen die Funktionen

$$H(u)\Theta(u) \quad \text{und} \quad H_1(u)\Theta_1(u).$$

Es besteht daher eine Relation

$$H(u+v)\,\Theta(u-v) = c_1\, H(u)\,\Theta(u) + c_2 H_1(u)\,\Theta_1(u).$$

Wir setzen $u = 0$ und erhalten

$$c_2 = \frac{H(v)\,\Theta(v)}{H_1(0)\,\Theta_1(0)}.$$

Für $u = \omega_1$ ergibt sich

$$c_1 = \frac{H(v+\omega_1)\,\Theta(v-\omega_1)}{H(\omega_1)\,\Theta(\omega_1)} = \frac{H_1(v)\,\Theta_1(v)}{H_1(0)\,\Theta_1(0)}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} H_1(0)\,\Theta_1(0) H(u+v)\,\Theta(u-v) &= \\ = H(u)\,\Theta(u) H_1(v)\,\Theta_1(v) &+ H_1(u)\,\Theta_1(u) H(v)\,\Theta(v). \end{aligned} \tag{18}$$

Bilden wir das Produkt

$$f(u) = \Theta(u+v)\Theta(u-v).$$

Die Funktion $f(u)$ genügt den Gleichungen (§ 55, Nr. 14)

$$f(u+2\omega_1) = f(u) \qquad f(u+2\omega_3) = e^{-2\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_3)} f(u);$$

$f(u)$ ist daher eine ϑ-Funktion zweiter Ordnung mit der Charakteristik (0,0). Dieselbe Charakteristik besitzen die beiden Funktionen $\Theta^2(u)$ und $H^2(u)$. Wir können deshalb die Gleichung ansetzen

$$\Theta(u+v)\Theta(u-v) = c_1\Theta^2(u) + c_2 H^2(u).$$

Wir setzen einmal $u=0$ und dann $u=\omega_1$ und erhalten

$$c_1 = \frac{\Theta^2(v)}{\Theta^2(0)},$$

$$\Theta(\omega_1+v)\Theta(\omega_1-v) = c_1\Theta^2(\omega_1) + c_2 H^2(\omega_1).$$

Der letzten Gleichung können wir auch die Form geben

$$\Theta_1^2(v) = c_1\Theta_1^2(0) + c_2 H_1^2(0).$$

Substituieren wir den Wert von c_1, so erhalten wir

$$\Theta^2(0)\Theta_1^2(v) = \Theta_1^2(0)\Theta^2(v) + c_2\Theta^2(0)H_1^2(0)$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf (17)

$$c_2 = -\frac{H^2(v)}{\Theta^2(0)}.$$

Substituieren wir die Werte von c_1 und c_2, so folgt:

$$(19)\qquad \Theta^2(0)\Theta(u+v)\Theta(u-v) = \Theta^2(u)\Theta^2(v) - H^2(u)H^2(v).$$

Aus (18) und (19) folgt sodann

$$(20)\quad \frac{H(u+v)}{\Theta(u+v)} = \frac{\Theta^2(0)}{H_1(0)\Theta_1(0)} \cdot \frac{H(u)\Theta(u)H_1(v)\Theta_1(v) + H_1(u)\Theta_1(u)H(v)\Theta(v)}{\Theta^2(u)\Theta^2(v) - H^2(u)H^2(v)}.$$

Wir werden später sehen, daß diese Gleichung das Additionstheorem der Jacobischen Funktion $\operatorname{sn} u$ ausspricht.

Fünfter Abschnitt.

Darstellung der elliptischen Funktionen.

§ 57. Darstellung der Funktion $p'(u)$. Wir haben im vorigen Abschnitt die Existenz der elliptischen Funktionen nachgewiesen und ihre charakteristischen Eigenschaften festgestellt. Es erübrigt diese Funktionen analytisch darzustellen.

Aus Zweckmäßigkeitsgründen beginnen wir mit der Darstellung der Funktion $p'(u)$.

Die Funktion $p'(u)$ wird im Nullpunkt und in den zu ihm homologen Punkten

$$w_{\lambda\mu} = 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3$$

zur dritten Ordnung unendlich und zwar ist im Punkt $w_{\lambda\mu}$

$$\lim\left[p'(u) + \frac{2}{(u - w_{\lambda\mu})^3}\right] = 0.$$

Es ist leicht, analytische Ausdrücke herzustellen, die dieselben Unstetigkeiten darbieten. Der einfachste Ausdruck dieser Art ist die Reihe

$$(1) \qquad -2\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(u - w_{\lambda\mu})^3}.$$

Wir beweisen zunächst, daß diese Reihe unbedingt und gleichmäßig konvergiert, sofern der Punkt u mit keinem der Punkte $w_{\lambda\mu}$ zusammenfällt.*)

Von der Reihe (1) trennen wir das Anfangsglied

$$-\frac{2}{u^3}$$

ab, so daß im folgenden die Kombination der Summations-

---

*) Bezüglich der Begriffe der unbedingten und gleichmäßigen Konvergenz vgl. F. Th. § 24.

indizes $\lambda = 0$, $\mu = 0$ auszuschließen ist. Wir ziehen nur solche Werte der Variabeln u in Betracht, die der Bedingung genügen

$$(2) \qquad \left| 1 - \frac{u}{w_{\lambda\mu}} \right| \geqq \varrho$$

für alle ganzen Zahlen λ, μ mit Ausnahme von $\lambda = 0$, $\mu = 0$.

Da die positive Größe ϱ beliebig gewählt werden darf, besagt diese Annahme nicht mehr, als daß der Punkt u mit keinem der Punkte $w_{\lambda\mu}$ zusammenfallen darf.

Weil der Quotient $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ keinen reellen Wert hat, so liegen die Werte der sämtlichen Quotienten

$$\left| \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{w_{\lambda\mu}} \right|$$

unter einer angebbaren positiven Größe ϱ'. Folglich ist für alle in Betracht kommenden Werte der Variabeln u und der Indizes λ, μ

$$\left| \frac{1}{(u - w_{\lambda\mu})^3} \right| = \frac{1}{(\lambda^2 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left| \frac{(\lambda^2 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}}{w_{\lambda\mu}{}^3} \right| \cdot \frac{1}{\left| \left(1 - \frac{u}{w_{\lambda\mu}}\right)^3 \right|}$$

$$< \frac{\varrho'^3}{\varrho^3} \cdot \frac{1}{(\lambda^2 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir brauchen daher nur noch die Konvergenz der Reihe

$$S = \sum{}' \frac{1}{(\lambda^2 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}}$$

zu beweisen. Die Summe ist zu erstrecken über alle Kombinationen von ganzen Zahlen λ, μ mit Ausnahme der Kombination $\lambda = 0$, $\mu = 0$. An diese Annahme soll der Akzent am Summenzeichen erinnern.

Die vier Glieder, die den Indizes

$$\pm \lambda, 0 \quad \text{und} \quad 0, \pm \lambda$$

entsprechen, haben denselben Wert und ebenso die vier Glieder, die den Indizes

$$\pm \lambda, \qquad \pm \mu$$

entsprechen. Daher ist

$$S = 4 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^3} + 4 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda^2 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{(\lambda^2+\mu^2)^{\frac{3}{2}}} < \int\limits_{\mu-1}^{\mu} \frac{dx}{(\lambda^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Folglich ist

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda^2+\mu^2)^{\frac{3}{2}}} < \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(\lambda^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\lambda^2}$$

also

$$S < 4\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^3}\right).$$

Die Reihe (1) konvergiert demnach, wenn die Bedingung (2) erfüllt ist, unbedingt und gleichmäßig, was zu beweisen war.

Diese Reihe stellt daher eine einwertige Funktion $F(u)$ der Variabeln u dar. Diese Funktion besitzt die beiden Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_3$, denn eine Vermehrung der Variabeln u um eine dieser Perioden ist mit einer Umstellung der Glieder der Reihe (1) gleichbedeutend.

Die Funktion $F(u)$ ist ungerade, denn ändern wir gleichzeitig das Vorzeichen von u und die Vorzeichen der Summationsindizes — das letztere bewirkt nur eine Umstellung der Glieder der Reihe — so ändert auch die Reihensumme ihr Vorzeichen.

Die Differenz $p'(u) - F(u)$ ist demnach eine ungerade, doppeltperiodische Funktion. Sie wird im fundamentalen Periodenparallelogramm nirgends unstetig, ist also eine Konstante, und zwar als ungerade Funktion $= 0$.

Damit haben wir für die Funktion $p'(u)$ die Darstellung gewonnen

$$(3) \quad p'(u) = -2\sum \frac{1}{(u-w_{\lambda\mu})^3}, \qquad \lambda, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

§ 58. Darstellung der Funktionen $p(u)$, $\zeta(u)$ und $\sigma(u)$. Weil die Reihe (2) des vorigen Paragraphen gleichmäßig konvergiert, darf sie gliedweise integriert werden. Es ist somit

$$\int\limits_0^u \left[p'(u)+\frac{2}{u^3}\right] du = -\sum{}' \int\limits_0^u \frac{2\,du}{(u-w_{\lambda\mu})^3},$$

$\lambda, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, mit Ausnahme der Kombination $\lambda = 0, \mu = 0$.

Für $u = 0$ ist

$$\lim \left[p(u) - \frac{1}{u^2}\right] = 0.$$

Folglich erhalten wir

$$(1) \qquad p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u - w_{\lambda\mu})^2} - \frac{1}{w_{\lambda\mu}^2}\right].$$

Die beiden in der Klammer stehenden Terme bilden zusammen ein Reihenglied und dürfen daher nicht auseinander gerissen werden.

Auch die vorstehende Reihe konvergiert unbedingt und darf deshalb gliedweise integriert werden. Mit Rücksicht auf die Definition der Funktion $\zeta(u)$ (§ 48) erhalten wir

$$-\int_0^u \left[p(u) - \frac{1}{u^2}\right] du = \zeta(u) - \frac{1}{u} = -\sum{}' \int_0^u \left[\frac{1}{(u - w_{\lambda\mu})^2} - \frac{1}{w_{\lambda\mu}^2}\right] du.$$

Es folgt

$$(2) \qquad \zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum{}' \left[\frac{1}{u - w_{\lambda\mu}} + \frac{u}{w_{\lambda\mu}^2} + \frac{1}{w_{\lambda\mu}}\right].$$

Durch abermalige gliedweise Integration erhalten wir mit Rücksicht auf die Definition der Funktion $\sigma(u)$ (§ 49)

$$(3) \int_0^u \left[\zeta(u) - \frac{1}{u}\right] du = \log \frac{\sigma(u)}{u} = \sum{}' \int_0^u \left[\frac{1}{u - w_{\lambda\mu}} + \frac{u}{w_{\lambda\mu}^2} + \frac{1}{w_{\lambda\mu}}\right] du.$$

Es folgt

$$(4) \qquad \log \frac{\sigma(u)}{u} = \sum{}' \left[\log\left(1 - \frac{u}{w_{\lambda\mu}}\right) + \frac{u^2}{2 w_{\lambda\mu}^2} + \frac{u}{w_{\lambda\mu}}\right].$$

Bezüglich der Definition der Logarithmen, die in der vorstehenden Gleichung auftreten, ist zu bemerken: die in der Gleichung (3) vorkommenden Integrale sind selbstverständlich alle über denselben Weg zu erstrecken. Der Integrationsweg darf durch keinen der Punkte $w_{\lambda\mu}$ gehen, im übrigen kann er beliebig gewählt werden. Einem bestimmten Integrationsweg entsprechen eindeutig bestimmte Werte der Logarithmen.

Aus (4) folgt:

$$(5) \qquad \sigma(u) = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{w_{\lambda\mu}}\right) e^{\frac{u}{w_{\lambda\mu}} + \frac{u^2}{2 w_{\lambda\mu}^2}}$$

$(\lambda, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ ausgenommen $\lambda = 0,\ \mu = 0)$.

Die Gleichungen (1) und (2) setzen die Unstetigkeiten der Funktionen $p(u)$ und $\zeta(u)$ in Evidenz, die Gleichung (5) die Nullpunkte der Funktion $\sigma(u)$.

Die Funktion $p(u)$ ist in den Größen u, ω_1, ω_3 homogen vom Grade -2, die Funktion $\zeta(u)$ ist homogen vom Grade -1, die Funktion $\sigma(u)$ ist homogen vom Grade $+1$.

Führen wir an Stelle der Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$ ein anderes Paar primitiver Perioden

$$(6)\qquad 2\omega_1' = \alpha\cdot 2\omega_1 + \beta\cdot 2\omega_3,\qquad 2\omega_3' = \gamma\cdot 2\omega_1 + \delta\cdot 2\omega_3$$

ein. α, β, γ, δ bedeuten ganze Zahlen, die der Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügen (vgl. § 39). An Stelle der Größe

$$w_{\lambda\mu} = 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3$$

tritt nun die Größe

$$w_{\lambda\mu}' = 2(\lambda\alpha + \mu\gamma)\omega_1 + 2(\lambda\beta + \mu\delta)\omega_3.$$

Wenn die Indizes λ, μ alle ganzen Zahlen mit Ausnahme der Kombination $\lambda = 0$, $\mu = 0$ durchlaufen, so gilt dasselbe für die Indizes

$$\lambda\alpha + \mu\gamma \quad\text{und}\quad \lambda\beta + \mu\delta.$$

Daraus folgt: die Funktionen $p(u)$, $\zeta(u)$ und $\sigma(u)$ ändern sich nicht, wenn man die Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$ durch ein anderes Paar primitiver Perioden ersetzt; diese Funktionen sind also der Substitution (6) gegenüber invariant.

Aus der Gleichung (1) ergibt sich ein Ausdruck der Invarianten g_2 und g_3 durch die Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_3$. Entwickeln wir die Glieder der Reihe (1) nach steigenden Potenzen von u, so erhalten wir

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + u^2 \sum{}' \frac{1}{w_{\lambda\mu}^4} + u^4 \sum{}' \frac{1}{w_{\lambda\mu}^6} + \cdots.$$

Der Vergleich mit der Reihenentwicklung (§ 47, Nr. 9)

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \cdots$$

zeigt, daß

$$g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{w_{\lambda\mu}^4},\qquad g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{w_{\lambda\mu}^6}$$

ist.

Aus dem Konvergenzbeweis, den wir im vorigen Paragraphen geführt haben, geht hervor, daß die beiden vorstehenden Reihen konvergieren, wenn der Quotient $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ keinen reellen Wert besitzt. Daraus folgt: die Größen g_2 und g_3 können so gewählt werden, daß die beiden Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$ vorgeschriebene Werte annehmen, mit der einzigen Einschränkung, daß der Periodenquotient keine reelle Zahl ist. Derselben Bedingung unterliegen die Perioden einer einwertigen doppelt periodischen Funktion.*)

Daraus folgt, daß sich die Begriffe „elliptische Funktion" und „einwertige doppelt periodische Funktion ohne wesentlich singulären Punkt im Endlichen" vollständig decken (vgl. § 47 Schluß).

Man kann daher, um die Theorie der elliptischen Funktionen zu entwickeln, auch von dem Begriff der einwertigen doppelt periodischen Funktion ausgehen. Die Darstellung der Theorie, zu der man auf diesem Weg gelangt, gestaltet sich äußerst einfach und durchsichtig.**) Der Weg, der in diesem Buch eingeschlagen ist, ist erheblich weiter. Er bietet dafür einen Vorteil, der namentlich für ein Lehrbuch ins Gewicht fällt: die Methoden, die wir benutzt haben, sind in weitem Maße der Verallgemeinerung fähig; sie lassen sich mutatis mutandis auch dann anwenden, wenn an Stelle der quadratischen Grundgleichung zwischen der unabhängigen Variabeln x und der Irrationalität s, von der wir ausgegangen sind, eine beliebige algebraische Gleichung zwischen x und s tritt.

§ 59. Darstellung der Funktionen $\wp(u)$ und $\zeta(u)$ durch einfach unendliche Reihen. Aus den zweifach unendlichen Reihen des vorigen Paragraphen lassen sich leicht einfach unendliche Reihen ableiten.

Zu dem Zweck fassen wir alle die Glieder der Summe (1) des vorigen Paragraphen, die demselben Index μ entsprechen, in eine Teilsumme zusammen. Unter Benutzung der abkürzenden Bezeichnungen

*) Vgl. F. Th. § 39.

**) Der sechste Abschnitt der F. Th. gibt einen kurzen Abriß dieser Theorie.

$$(1)\quad \varphi_0(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(u-2\lambda\omega_1)^2} + \frac{1}{(u+2\lambda\omega_1)^2} - 2\cdot\frac{1}{4\lambda^2\omega_1^{\,2}}\right],$$

$$(2)\quad \varphi_\mu(u) = \frac{1}{(u-2\mu\omega_3)^2} - \frac{1}{4\mu^2\omega_3^{\,2}} + \sum_{\lambda=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(u-2\lambda\omega_1-2\mu\omega_3)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(u+2\lambda\omega_1-2\mu\omega_3)^2} - \frac{1}{(2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3)^2} - \frac{1}{(2\lambda\omega_1-2\mu\omega_3)^2}\right]$$

können wir die in Rede stehende Gleichung in der Form schreiben

$$(3)\qquad p(u) = \varphi_0(u) + \sum_{\mu=1}^{\infty}[\varphi_\mu(u) + \varphi_{-\mu}(u)].$$

Wir machen nun von der bekannten Partialbruchzerfällung der Kotangente

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-\lambda^2\pi^2} = \frac{1}{x} + \sum_{\lambda=1}^{\infty}\left[\frac{1}{x-\lambda\pi} + \frac{1}{x+\lambda\pi}\right]$$

Gebrauch*). Durch Differentiation dieser Gleichung ergibt sich

$$(4)\qquad \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(x-\lambda\pi)^2} + \frac{1}{(x+\lambda\pi)^2}\right].$$

Wegen

$$\lim_{x=0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}$$

folgt aus der vorstehenden Gleichung für $x = 0$

$$(5)\qquad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2}.$$

Wir setzen nun in (4)

$$x = \frac{\pi u}{2\omega_1}$$

und substituieren in (1). Es folgt

$$(6)\qquad \varphi_0(u) = \frac{\pi^2}{4\omega_1^{\,2}}\,\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi u}{2\omega_1}} - \frac{\pi^2}{12\omega_1^{\,2}}.$$

Sodann setzen wir in (4)

$$x = \frac{\pi}{2\omega_1}(u - 2\mu\omega_3)$$

*) Vgl. F. Th. § 34.

und substituieren in (2). Wir erhalten

$$(7)\qquad \varphi_\mu(u) = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2\omega_1}(u-2\mu\omega_3)} - \frac{1}{\sin^2\mu\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}}\right].$$

Die Reihe

$$(8)\qquad \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\mu\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}}$$

konvergiert. Zum Beweis setzen wir, Reelles und Imaginäres trennend

$$\frac{\pi\omega_3}{\omega_1} = \alpha + \beta i.$$

Die Größe β ist von Null verschieden und positiv. Aus der Gleichung

$$\frac{\sin\mu\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}}{\sin(\mu+1)\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}} = \frac{e^{-\mu(\beta-\alpha i)} - e^{\mu(\beta-\alpha i)}}{e^{-(\mu+1)(\beta-\alpha i)} - e^{(\mu+1)(\beta-\alpha i)}}$$

ergibt sich, daß der absolute Betrag der links stehenden Größe bei wachsendem μ gegen $e^{-\beta}$ konvergiert und hieraus folgt die Konvergenz der Reihe (8). In derselben Weise ist die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2\omega_1}(u-2\mu\omega_3)}$$

zu beweisen.

Wir substituieren die Werte (6) und (7) in (3) und fassen die von u unabhängigen Glieder zusammen. Wir erhalten

$$(9)\quad p(u) = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega_1}} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2\omega_1}(u-2\mu\omega_3)} + \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2\omega_1}(u+2\mu\omega_3)}\right)\right] - a$$

$$= \frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2\omega_1}(u-2\mu\omega_3)} - a.$$

Die Konstante a hat den Wert

$$(10)\qquad a = \frac{\pi^2}{2\omega_1^2}\left[\frac{1}{6} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\mu\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}}\right].$$

Durch Integration der Gleichung (9) ergibt sich bei Berücksichtigung der Bedingung

$$\lim_{u=0}\left[\zeta(u)-\frac{1}{u}\right]=0$$

$$(11)\quad \zeta(u)=\frac{\pi}{2\omega_1}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2\omega_1}+\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\omega_1}(u-2\mu\omega_3)+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\omega_1}(u+2\mu\omega_3)\right)\right]+a\,u.$$

Das allgemeine Glied der rechts stehenden Reihe formen wir um. Wir bemerken zunächst, daß

$$(12)\quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\omega_1}(u-2\mu\omega_3)+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\omega_1}(u+2\mu\omega_3)=\frac{2\sin\frac{\pi u}{\omega_1}}{\cos 2\mu\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}-\cos\frac{\pi u}{\omega_1}}$$

ist und wir setzen sodann zur Abkürzung

$$(13)\quad q=e^{\frac{\pi\omega_3 i}{\omega_1}}.$$

Da der imaginäre Teil des Periodenquotienten $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ positiv imaginär ist, so ist der absolute Betrag der Größe q kleiner als 1. Man bezeichnet diese Größe als „Jacobische Konstante“.

Aus (13) folgt

$$\cos 2\mu\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}=\frac{1}{2}(q^{2\mu}+q^{-2\mu}).$$

Daher ist die rechte Seite der Gleichung (12)

$$=\frac{4q^{2\mu}\sin\frac{\pi u}{\omega_1}}{1-2q^{2\mu}\cos\frac{\pi u}{\omega_1}+q^{4\mu}}.$$

Wir substituieren diesen Ausdruck in (11) und erhalten

$$(14)\quad \zeta(u)=\frac{\pi}{2\omega_1}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2\omega_1}+\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{4q^{2\mu}\sin\frac{\pi u}{\omega_1}}{1-2q^{2\mu}\cos\frac{\pi u}{\omega_1}+q^{4\mu}}\right]+au.$$

Aus der vorstehenden Gleichung folgt

$$\zeta(u+2\omega_1)-\zeta(u)=2a\omega_1.$$

Es ist daher

$$(15)\quad a=\frac{\eta_1}{\omega_1}.$$

Um die Halbperiode η_1 des Integrals zweiter Gattung durch die Größe q auszudrücken, setzen wir in der Gleichung (10)

$$\sin^2 \frac{\mu \pi \omega_3}{\omega_1} = \left[\frac{q^{-\mu} - q^{\mu}}{2i}\right]^2 = -\frac{(1-q^{2\mu})^2}{4q^{2\mu}}. \tag{13}$$

Wir substituieren in (15) und erhalten

$$\eta_1 = \frac{\pi^2}{2\omega_1}\left[\frac{1}{6} - \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{4q^{2\mu}}{(1-q^{2\mu})^2}\right]. \tag{16}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich auf Grund der Legendreschen Relation

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \frac{\pi i}{2},$$

ein Ausdruck für die zweite Halbperiode η_3.

§ 60. Einfach unendliche Produkte. Aus der Gleichung (14) des vorigen Paragraphen folgt mit Rücksicht auf die Bedingung

$$\lim_{u=0} \frac{\sigma(u)}{u} = 1$$

$$\log \sigma(u) = \log \sin \frac{\pi u}{2\omega_1} - \log \frac{\pi}{2\omega_1} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \log \frac{1 - 2q^{2\mu}\cos\frac{\pi u}{\omega_1} + q^{4\mu}}{(1-q^{2\mu})^2} + \frac{\eta_1}{2\omega_1} u^2$$

und hieraus

$$\sigma(u) = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \sin\frac{\pi u}{2\omega_1} \prod_{\mu=1}^{\infty} \frac{1 - 2q^{2\mu}\cos\frac{\pi u}{\omega_1} + q^{4\mu}}{(1-q^{2\mu})^2}. \tag{1}$$

An Stelle der hier auftretenden trigonometrischen Funktionen können wir auch Exponentialfunktionen einführen. Wir setzen

$$e^{\frac{\pi i u}{2\omega_1}} = z \tag{2}$$

und erhalten

$$\sigma(u) = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \frac{z - z^{-1}}{2i} \prod_{\mu=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2\mu}z^2)(1 - q^{2\mu}z^{-2})}{(1-q^{2\mu})^2}. \tag{3}$$

Aus den vorstehenden Darstellungen der Funktion $\sigma(u)$ ergeben sich unmittelbar Darstellungen der Funktion $H(u)$.

Es ist (§ 49, Nr. 13)

$$H(u) = c \cdot e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \sigma(u),$$

folglich

$$(4) \qquad H(u) = C \sin \frac{\pi u}{2\omega_1} \prod_{\mu=1}^{\infty} (1 - 2q^{2\mu} \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + q^{4\mu})$$

$$= C \cdot \frac{z - z^{-1}}{2i} \prod_{\mu=1}^{\infty} (1 - q^{2\mu} z^2)(1 - q^{2\mu} z^{-2}).$$

Hier bedeutet C eine Konstante, über die wir im folgenden Paragraphen verfügen werden.

Ersetzt man die Größe u durch die Größe $u + \omega_1$, so tritt an Stelle der Größe z (2) die Größe iz. Aus der Gleichung (17) des § 55

$$H_1(u) = H(u + \omega_1),$$

folgt daher

$$(5) \qquad H_1(u) = C \cos \frac{\pi u}{2\omega_1} \prod_{\mu=1}^{\infty} \left(1 + 2q^{2\mu} \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + q^{4\mu}\right)$$

$$= C \frac{z + z^{-1}}{2} \prod_{\mu=1}^{\infty} (1 + q^{2\mu} z^2)(1 + q^{2\mu} z^{-2}).$$

Ersetzen wir in der Gleichung (4) u durch $u + \omega_3$, so tritt an Stelle der Größe z (2) die Größe

$$e^{\frac{\pi i (u + \omega_3)}{2\omega_1}} = \sqrt{q}\, z$$

an Stelle der Größe

$$\frac{z - z^{-1}}{2i} \quad \text{die Größe} \quad \frac{qz^2 - 1}{2i\sqrt{q}\, z}.$$

Aus der Gleichung (17) des § 55

$$\Theta(u) = -\, i e^{\frac{\pi i}{4\omega_1}(2u + \omega_3)} H(u + \omega_3) = -\, i q^{\frac{1}{4}} z\, H(u + \omega_3)$$

folgt daher

$$(6) \qquad \Theta(u) = C \cdot \tfrac{1}{2} q^{-\frac{1}{4}} \prod_{\mu=1}^{\infty} \left(1 - 2q^{2\mu-1} \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + q^{4\mu-2}\right)$$

$$= C \cdot \tfrac{1}{2} q^{-\frac{1}{4}} \prod_{\mu=1}^{\infty} (1 - q^{2\mu-1} z^2)(1 - q^{2\mu-1} z^{-2})$$

und hieraus folgt (§ 55, Nr. 17)

$$(7) \qquad \Theta_1(u) = \Theta(u + \omega_1) = e^{\frac{\pi i}{4\omega_1}(2u+\omega_2)} H(u + \omega_2)$$

$$= C \cdot \tfrac{1}{2} q^{-\frac{1}{4}} \prod_{\mu=1}^{\infty} \left(1 + 2q^{2\mu-1} \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + q^{4\mu-2}\right)$$

$$= C \cdot \tfrac{1}{2} q^{-\frac{1}{4}} \prod_{\mu=1}^{\infty} (1 + q^{2\mu-1} z^2)(1 + q^{2\mu-1} z^{-2}).$$

Die Potenz $q^{-\frac{1}{4}}$, die in den Gleichungen (6) und (7) vorkommt, ist durch die Gleichung

$$q^{-\frac{1}{4}} = e^{-\frac{\pi \omega_2 i}{4\omega_1}}$$

eindeutig bestimmt.

Aus den Gleichungen (5), (6) und (7) in Verbindung mit den Gleichungen (10) des § 55 ergibt sich eine Darstellung der drei Funktionen $\sigma_\nu(u)$ durch einfach unendliche Produkte, auf die wir unten zurückkommen werden.

§ 61. Darstellung der Θ-Funktionen durch einfach unendliche Reihen. Um zunächst die Funktion $\Theta_1(u)$ in eine Reihe zu entwickeln, betrachten wir das endliche Produkt

$$(1) \qquad F(z) = (1 + qz^2)(1 + q^3 z^2) \cdots (1 + q^{2n-1} z^2)$$
$$(1 + qz^{-2})(1 + q^3 z^{-2}) \cdots (1 + q^{2n-1} z^{-2}).$$

Die Funktion $F(z)$ genügt der Funktionalgleichung

$$\frac{F(qz)}{F(z)} = \frac{1 + q^{2n+1} z^2}{1 + qz^2} \cdot \frac{1 + q^{-1} z^{-2}}{1 + q^{2n-1} z^{-2}}$$

oder

$$(2) \qquad (q^{2n} + qz^2) F(qz) = (1 + q^{2n+1} z^2) F(z).$$

Führen wir auf der rechten Seite der Gleichung (1) die Multiplikation aus, so ergibt sich ein Aggregat der Form

$$(3)\quad F(z) = A_0 + A_1(z^2 + z^{-2}) + A_2(z^4 + z^{-4}) \cdots + A_n(z^{2n} + z^{-2n})$$
$$= \sum_{\mu=-n}^{+n} A_\mu z^{2\mu} \qquad (A_{-\mu} = A_\mu).$$

Der letzte Koeffizient hat den Wert

$$(4)\qquad A_n = q^{n^2}.$$

Aus (2) und (3) folgt

$$\sum_{\mu=-n}^{+n} A_\mu q^{2n+2\mu} z^{2\mu} + \sum_{\mu=-(n-1)}^{n+1} A_{\mu-1} q^{2\mu-1} z^{2\mu} =$$
$$= \sum_{\mu=-n}^{n} A_\mu z^{2\mu} + \sum_{\mu=-(n-1)}^{n+1} A_{\mu-1} q^{2n+1} z^{2\mu}$$

und hieraus ergibt sich die Rekursionsformel

$$(1 - q^{2n+2\mu}) A_\mu = q^{2\mu-1}(1 - q^{2n-2\mu+2}) A_{\mu-1}$$
$$(\mu = 1, 2, \cdots, n).$$

Mit Rücksicht auf (4) erhalten wir

$$A_{n-1} = \frac{1 - q^{4n}}{1 - q^2}\, q^{(n-1)^2}$$

$$A_{n-2} = \frac{(1 - q^{4n})(1 - q^{4n-2})}{(1 - q^2)(1 - q^4)}\, q^{(n-2)^2}$$

$$A_\mu = \frac{(1 - q^{4n})(1 - q^{4n-2}) \cdots (1 - q^{2n+2\mu+2})}{(1 - q^2)(1 - q^4) \cdots (1 - q^{2n-2\mu})}\, q^{\mu^2}$$

$$A_0 = \frac{(1 - q^{4n})(1 - q^{4n-2}) \cdots (1 - q^{2n+2})}{(1 - q^2)(1 - q^4) \cdots (1 - q^{2n})}.$$

Gehen wir zur Grenze für unendlich wachsende n über, so wird

$$\lim_{n=\infty} A_0 = \frac{1}{(1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)\cdots} = \frac{1}{Q}$$

$$\lim_{n=\infty} A_\mu = \frac{1}{Q} \cdot q^{\mu^2}.$$

Der Vergleich der Gleichung (1) mit der Gleichung (7) des vorigen Paragraphen zeigt, daß

$$\Theta_1(u) = \tfrac{1}{2} C q^{-\frac{1}{4}} \lim_{n=\infty} F(z) \qquad \left(q = e^{\frac{\pi \omega_3 i}{\omega_1}} \quad z = e^{\frac{\pi i u}{2\omega_1}}\right)$$

ist. Wir setzen nun nach dem Vorgang Jacobis die zur Verfügung stehende Konstante

$$C = 2q^{\frac{1}{4}} Q = 2q^{\frac{1}{4}} \prod_{\mu=1}^{\infty} (1 - q^{2\mu}) \tag{5}$$

und erhalten für $\Theta_1(u)$ die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned}\Theta_1(u) &= \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} q^{\mu^2} z^{2\mu} \\ &= 1 + 2q \cos\frac{\pi u}{\omega_1} + 2q^4 \cos\frac{2\pi u}{\omega_1} + 2q^9 \cos\frac{3\pi u}{\omega_1} + \cdots\end{aligned} \tag{6}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (14) und (15) des § 55 ist ferner

$$\begin{aligned}\Theta(u) &= \Theta_1(u + \omega_1) \\ &= \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\mu} q^{\mu^2} z^{2\mu} \\ &= 1 - 2q \cos\frac{\pi u}{\omega_1} + 2q^4 \cos\frac{2\pi u}{\omega_1} - 2q^9 \cos\frac{3\pi u}{\omega_1} + \cdots.\end{aligned} \tag{7}$$

Aus der Gleichung (18) des § 55 folgt

$$\begin{aligned}H_1(u) &= e^{\frac{\pi i}{4\omega_1}(2u + \omega_3)} \Theta_1(u + \omega_3) = q^{\frac{1}{4}} z \Theta_1(u + \omega_3) \\ &= \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} q^{\left(\frac{2\mu+1}{2}\right)^2} z^{2\mu+1} \\ &= 2q^{\frac{1}{4}} \cos\frac{\pi u}{2\omega_1} + 2q^{\frac{9}{4}} \cos\frac{3\pi u}{2\omega_1} + 2q^{\frac{25}{4}} \cos\frac{5\pi u}{2\omega_1} + \cdots.\end{aligned} \tag{8}$$

Endlich folgt aus der Gleichung (17) des § 55

$$\begin{aligned}H(u) &= -H_1(u + \omega_1) \\ &= -i \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\mu} q^{\left(\frac{2\mu+1}{2}\right)^2} z^{2\mu+1} \\ &= 2q^{\frac{1}{4}} \sin\frac{\pi u}{2\omega_1} - 2q^{\frac{9}{4}} \sin\frac{3\pi u}{2\omega_1} + 2q^{\frac{25}{4}} \sin\frac{5\pi u}{2\omega_1} - \cdots.\end{aligned} \tag{9}$$

Weil der absolute Betrag $|q| < 1$ ist, so konvergieren die Reihen (6) bis (9) für jeden endlichen von Null verschiedenen Wert der Größe z oder was dasselbe sagen will, für jeden endlichen Wert der Variabeln u.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß die Periode $2\omega_1$ reell, die Periode $2\omega_3$ rein imaginär ist. Weil der Quotient $\tau = \omega_3/\omega_1$ positiv imaginär ist, müssen die beiden Größen ω_1 und ω_3/i dasselbe Vorzeichen besitzen. Die Jacobische Konstante

$$q = e^{\frac{\pi \omega_3 i}{\omega_1}}$$

ist in diesem Fall reell, positiv und < 1. Folglich sind auch die Koeffizienten unserer Reihen reell. Reellen Werten der Variabeln u entsprechen daher reelle Werte der Funktionen $H(u)$, $H_1(u)$, $\Theta(u)$, $\Theta_1(u)$. Rein imaginären Werten der Variabeln u entsprechen rein imaginäre Werte der Funktion $H(u)$ und reelle Werte der drei übrigen Funktionen. Wenn

$$\left|\frac{\omega_3}{\omega_1}\right| \leqq 1$$

ist, so ist

$$q \leqq e^{-\pi} < \frac{1}{23}.$$

In diesem Fall konvergieren die Reihen sehr schnell.

Die vier Funktionen H, H_1, Θ, Θ_1 hängen nur von den Quotienten

$$\frac{\pi u}{2\omega_1} = x \quad \text{und} \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = \tau$$

also nur von zwei Argumenten ab. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die vier Funktionen derselben partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{4i}{\pi}\frac{\partial f}{\partial \tau}$$

genügen.

§ 62. Darstellung der Funktionen $\sigma(u)$ und $\sigma_\nu(u)$.

Aus den Darstellungen der Funktionen H, H_1, Θ, Θ_1 durch einfach unendliche Produkte und Reihen ergeben sich auf Grund der Formeln des § 55 Darstellungen der Funktionen σ und σ_ν. Es erübrigt nur, die in den genannten Formeln

auftretenden Konstanten $H'(0)$, $H_1(0)$, $\Theta(0)$, $\Theta_1(0)$ zu berechnen. Wir benutzen zu diesem Zweck die unendlichen Produkte des § 60. Zur Abkürzung gebrauchen wir neben der im vorigen Paragraphen eingeführten Bezeichnung

$$Q = \prod_{\mu=1}^{\infty}(1 - q^{2\mu}) \tag{1}$$

noch die folgenden

$$Q_1 = \prod_{\mu=1}^{\infty}(1 + q^{2\mu}) \tag{2}$$

$$Q_2 = \prod_{\mu=1}^{\infty}(1 + q^{2\mu-1}) \tag{3}$$

$$Q_3 = \prod_{\mu=1}^{\infty}(1 - q^{2\mu-1}). \tag{4}$$

Zwischen den Größen Q, Q_1, Q_2, Q_3 besteht eine einfache Beziehung. Um sie abzuleiten, bemerken wir, daß $Q Q_3$ das Produkt aus den sämtlichen Faktoren

$$1 - q,\quad 1 - q^2,\quad 1 - q^3,\quad 1 - q^4 \cdots$$

ist. Denn Q enthält alle die Faktoren, in denen der Exponent von q eine ungerade Zahl ist und Q_3 alle die Faktoren, in denen er gerade ist.

Es ist also

$$Q Q_3 = \prod_{\mu=1}^{\infty}(1 - q^{\mu})$$

und auf dieselbe Art ist zu zeigen, daß

$$Q_1 Q_2 = \prod_{\mu=1}^{\infty}(1 + q^{\mu})$$

ist. Folglich ist

$$Q Q_1 Q_2 Q_3 = \prod_{\mu=1}^{\infty}(1 - q^{2\mu}) = Q$$

und hieraus folgt, weil Q nicht verschwinden kann,

$$Q_1 Q_2 Q_3 = 1. \tag{5}$$

In den Gleichungen (5), (6) und (7) des § 60 setzen wir nun $u = 0$ und substituieren den Wert

$$C = 2 q^{\frac{1}{4}} Q \quad (\text{§ 61, Nr. 5}).$$

Wir erhalten

$$H_1(0) = H(\omega_1) = 2q^{\frac{1}{4}} Q Q_1^2 \tag{6}$$

$$\Theta(0) = -iq^{\frac{1}{4}} H(\omega_3) = Q Q_3^2 \tag{7}$$

$$\Theta_1(0) = q^{\frac{1}{4}} H(\omega_2) = Q Q_2^2. \tag{8}$$

Aus der Gleichung (4) des § 60 folgt

$$H'(0) = \frac{\pi}{\omega_1} q^{\frac{1}{4}} Q^3. \tag{9}$$

Wir substituieren diesen Wert in die Gleichung (5) des § 55

$$\sigma(u) = e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \frac{H(u)}{H'(0)}$$

und erhalten

$$\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\pi} e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \frac{H(u)}{q^{\frac{1}{4}} Q^3}. \tag{10}$$

Aus den Gleichungen (10) des § 55 folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (6), (7) und (8)

$$\sigma_1(u) = e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \frac{H_1(u)}{2q^{\frac{1}{4}} Q Q_1^2}. \tag{11}$$

$$\sigma_2(u) = e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \frac{\Theta_1(u)}{Q Q_2^2}. \tag{12}$$

$$\sigma_3(u) = e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \frac{\Theta(u)}{Q Q_3^2}. \tag{13}$$

§ 63. Bestimmung der Größen $\sqrt{e_\lambda - e_\mu}$ und $\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}$. In der Gleichung (10) des vorigen Paragraphen

$$\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\pi} e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \frac{H(u)}{q^{\frac{1}{4}} Q^3}$$

setzen wir der Reihe nach $u = \omega_1, \omega_2, \omega_3$. Bezüglich der auftretenden Exponentialgrößen ist zu bemerken: auf Grund der Legendreschen Relation ist

$$\frac{\eta_1}{2\omega_1}\omega_3^2 = \frac{\omega_3}{2\omega_1}(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1) + \tfrac{1}{2}\eta_3\omega_3 = \frac{\pi i \omega_3}{4\omega_1} + \tfrac{1}{2}\eta_3\omega_3,$$

$$\frac{\eta_1}{2\omega_1}\omega_2^2 = \frac{\pi i \omega_2}{4\omega_1} + \tfrac{1}{2}\eta_2\omega_2 = \frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i \omega_3}{4\omega_1} + \tfrac{1}{2}\eta_2\omega_2.$$

Folglich ist

$$e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}\omega_3^2} = q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2}\eta_3\omega_3} \quad \text{und} \quad e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}\omega_2^2} = \sqrt{i}\, q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2}\eta_2\omega_2}.$$

Aus der Herleitung dieser Formeln ergibt sich, daß

$$\sqrt{i} = e^{\frac{\pi i}{4}} \quad \text{und} \quad q^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\pi\omega_3 i}{\omega_1}}$$

ist; die beiden Größen sind also eindeutig bestimmt.

Nun erhalten wir mit Rücksicht auf die Gleichungen (6) bis (8) des vorigen Paragraphen

$$(1) \qquad \sigma(\omega_1) = \frac{\omega_1}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta_1\omega_1} \frac{H_1(0)}{q^{\frac{1}{4}} Q^3} = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta_1\omega_1} \frac{Q_1^2}{Q^2}.$$

$$(2) \qquad \sigma(\omega_2) = \frac{\omega_1}{\pi} \sqrt{i}\, e^{\frac{1}{2}\eta_2\omega_2} \frac{\Theta_1(0)}{q^{\frac{1}{4}} Q^3} = \frac{\omega_1}{\pi} \sqrt{i}\, e^{\frac{1}{2}\eta_2\omega_2} \frac{Q_2^2}{q^{\frac{1}{4}} Q^2}.$$

$$(3) \qquad \sigma(\omega_3) = \frac{\omega_1}{\pi} i e^{\frac{1}{2}\eta_3\omega_3} \frac{\Theta(0)}{q^{\frac{1}{4}} Q^3} = \frac{\omega_1}{\pi} i e^{\frac{1}{2}\eta_3\omega_3} \frac{Q_3^2}{q^{\frac{1}{4}} Q^2}.$$

Setzen wir auch in den Gleichungen (§ 54, Nr. 9 und 10)

$$\sqrt{p(u) - e_\nu} = \frac{\sigma_\nu(u)}{\sigma(u)} = e^{-\eta_\nu u} \frac{\sigma(u + \omega_\nu)}{\sigma(\omega_\nu)\sigma(u)} = e^{\eta_\nu u} \frac{\sigma(\omega_\nu - u)}{\sigma(\omega_\nu)\sigma(u)}$$

u der Reihe nach $= \omega_1, \omega_2, \omega_3$, so folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_3 \quad \eta_2 = \eta_1 + \eta_3$$

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$$

$$(4) \qquad \sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\sigma_2(\omega_1)}{\sigma(\omega_1)} = e^{\eta_2\omega_1} \frac{\sigma(\omega_3)}{\sigma(\omega_1)\sigma(\omega_2)}$$

$$(5) \qquad \sqrt{e_2 - e_1} = \frac{\sigma_1(\omega_2)}{\sigma(\omega_2)} = -e^{\eta_1\omega_2} \frac{\sigma(\omega_3)}{\sigma(\omega_1)\sigma(\omega_2)} = -i\sqrt{e_1 - e_2}$$

$$(6) \qquad \sqrt{e_2 - e_3} = \frac{\sigma_3(\omega_2)}{\sigma(\omega_2)} = -e^{\eta_3\omega_2} \frac{\sigma(\omega_1)}{\sigma(\omega_2)\sigma(\omega_3)}$$

$$(7) \qquad \sqrt{e_3 - e_2} = \frac{\sigma_2(\omega_3)}{\sigma(\omega_3)} = e^{\eta_2\omega_3} \frac{\sigma(\omega_1)}{\sigma(\omega_2)\sigma(\omega_3)} = -i\sqrt{e_2 - e_3}$$

$$(8) \qquad \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\sigma_3(\omega_1)}{\sigma(\omega_1)} = e^{-\eta_3\omega_1} \frac{\sigma(\omega_2)}{\sigma(\omega_1)\sigma(\omega_3)}$$

$$(9) \qquad \sqrt{e_3 - e_1} = \frac{\sigma_1(\omega_3)}{\sigma(\omega_3)} = e^{-\eta_1\omega_3} \frac{\sigma(\omega_2)}{\sigma(\omega_1)\sigma(\omega_3)} = -i\sqrt{e_1 - e_3}.$$

Durch diese Gleichungen ist die Bedeutung der Wurzeln $\sqrt{e_\lambda - e_\mu}$ eindeutig festgelegt.

Substituieren wir in die Gleichung (4) die Werte (1), (2) und (3) der Größen $\sigma(\omega_\nu)$, so folgt

$$\sqrt{e_1 - e_2} = e^{\frac{1}{2}(2\eta_2\omega_1 + \eta_3\omega_3 - \eta_1\omega_1 - \eta_2\omega_2)} \frac{\pi}{2\omega_1} \sqrt{i} \, \frac{Q^2 Q^2_3}{Q^2_1 Q^2_2}.$$

Nun ist

$$2\eta_2\omega_1 + \eta_3\omega_3 - \eta_1\omega_1 - \eta_2\omega_2 = -(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1) = -\frac{\pi i}{2}$$

und

$$Q_1 Q_2 Q_3 = 1$$

(Nr. 5 des vorigen Paragraphen).

Es folgt

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\pi}{2\omega_1} Q^2 Q^4_3. \tag{10}$$

Dementsprechend folgt aus den Gleichungen (6) und (8)

$$\sqrt{e_2 - e_3} = \frac{2\pi}{\omega_1} \sqrt{q} \, Q^2 Q^4_1 \tag{11}$$

$$\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{2\omega_1} Q^2 Q^4_2. \tag{12}$$

Aus den drei vorstehenden Gleichungen folgt die Identität

$$Q^8_2 = 16q\, Q^8_1 + Q^8_3. \tag{13}$$

Es folgt ferner

$$\sqrt[4]{e_1 - e_2} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega_1}} \, Q Q^2_3. \tag{14}$$

$$\sqrt[4]{e_2 - e_3} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega_1}} \cdot 2q^{\frac{1}{4}} Q Q^2_1. \tag{15}$$

$$\sqrt[4]{e_1 - e_3} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega_1}} \, Q Q_2^2. \tag{16}$$

Das Vorzeichen der Wurzel

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\omega_1}}$$

kann beliebig gewählt werden. Um nichts unbestimmt zu lassen, wollen wir festsetzen, es werde so gewählt, daß der Arkus der Wurzel

$$\leqq \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad > -\frac{\pi}{2}$$

ist. Wenn die Größe ω_1 reell und positiv, die Größe ω_3 positiv imaginär ist, so ist demnach die Wurzel positiv. Die

Größe q ist in diesem Fall reell und positiv und die Größen $Q\,Q_1$ $Q_2\,Q_3$ sind ebenfalls reell und positiv (vgl. 1 bis 4 des vorigen Paragraphen), folglich ist auch den vierten Wurzeln, die in den vorstehenden Gleichungen vorkommen, ihr positiver Wert beizulegen.

Aus den Gleichungen (14) bis (16) ergibt sich für die 24-te Wurzel aus der Diskriminante

$$G = 16\,(e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2 (e_2 - e_3)^2$$

der Ausdruck

$$\sqrt[24]{G} = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_1}}\, q^{\frac{1}{12}}\, Q. \tag{17}$$

Ferner können wir die vierten Wurzeln aus dem Modul und dem komplementären Modul

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt[8]{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}}\, \frac{Q_1}{Q_2}. \tag{18}$$

$$\sqrt[4]{k'} = \sqrt[8]{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}} = \frac{Q_3}{Q_2} \tag{19}$$

als eindeutige Funktion des Periodenquotienten definieren.

Endlich folgt aus den Gleichungen (6) bis (8) des vorigen Paragraphen und den Gleichungen (14) bis (16)

$$H_1(0) = 2q^{\frac{1}{4}}\, Q\, Q_1^2 = \sqrt{\frac{2\,\omega_1}{\pi}}\, \sqrt[4]{e_2 - e_3} \tag{20}$$

$$\Theta_1(0) = Q\, Q_2^2 = \sqrt{\frac{2\,\omega_1}{\pi}}\, \sqrt[4]{e_1 - e_3}. \tag{21}$$

$$\Theta(0) = Q\, Q_3^2 = \sqrt{\frac{2\,\omega_1}{\pi}}\, \sqrt[4]{e_1 - e_2}. \tag{22}$$

Aus der Gleichung (9) des vorigen Paragraphen folgt mit Rücksicht auf (17)

$$H'(0) = \frac{\pi}{\omega_1}\, q^{\frac{1}{4}}\, Q^3 = \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}}\, \sqrt[8]{G} \tag{23}$$

und hieraus wegen § 62, Nr. 5

$$H'(0) = \frac{\pi}{2\,\omega_1}\, H_1(0)\, \Theta(0)\, \Theta_1(0). \tag{24}$$

§ 64. Transformation der Perioden. Die Funktion $\sigma(u)$ ändert sich nicht, wenn wir an Stelle der Perioden $2\omega_1$,

$2\omega_3$ mittelst einer ganzzahligen Substitution von der Determinante 1 ein äquivalentes Periodenpaar $2\omega'_1$, $2\omega'_3$ einführen (§ 39). Man bezeichnet diese Operation als „lineare Periodentransformation“. Den Funktionen $\sigma_\nu(u)$ $(\nu = 1, 2, 3)$ kommt diese Eigenschaft der Invarianz nicht zu; wir wollen nun untersuchen, wie sich diese Funktionen einer linearen Periodentransformation gegenüber verhalten. Es sei

$$\omega'_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3 \quad \omega'_3 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3; \tag{1}$$

$\alpha\beta\gamma\delta$ bedeuten ganze Zahlen, die der Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{2}$$

genügen.

Wegen der doppelten Periodizität der Funktion $\wp(u)$ ergeben sich aus den Gleichungen

$$\wp(\omega_1) = e_1 \quad \wp(\omega_2) = e_2 \quad \wp(\omega_3) = e_3$$

drei Gleichungen

$$\wp(\omega'_1) = e_\lambda \quad \wp(\omega'_2) = e_\mu \quad \wp(\omega'_3) = e_\nu, \tag{3}$$

wo $\lambda\mu\nu$ eine Permutation der Zahlen 1 2 3 bedeuten. Ihre Werte hängen von den Resten ab, die die Zahlen $\alpha\beta\gamma\delta$ bei der Division durch 2 ergeben. Wir stellen sie in einer kleinen Tabelle zusammen.

(4)

	Reste modulo 2				Werte der Indizes		
	α	β	γ	δ	λ	μ	ν
I	1	0	0	1	1	2	3
II	1	0	1	1	1	3	2
III	0	1	1	0	3	2	1
IV	0	1	1	1	3	1	2
V	1	1	0	1	2	1	3
VI	1	1	1	0	2	3	1

Nun ist

$$\frac{\sigma_1(u, \omega'_1, \omega'_3)}{\sigma(u, \omega'_1, \omega'_3)} = \sqrt{p(u) - e_\lambda} = \frac{\sigma_\lambda(u, \omega_1, \omega_3)}{\sigma(u, \omega_1, \omega_3)}$$

$$\frac{\sigma_2(u, \omega'_1, \omega'_3}{\sigma(u, \omega'_1, \omega'_3)} = \sqrt{p(u) - e_\mu} = \frac{\sigma_\mu(u, \omega_1, \omega_3)}{\sigma(u, \omega_1, \omega_3)}$$

$$\frac{\sigma_3(u, \omega'_1, \omega'_3)}{\sigma(u, \omega'_1, \omega'_3)} = \sqrt{p(u) - e_\nu} = \frac{\sigma_\nu(u, \omega_1, \omega_3)}{\sigma(u, \omega_1, \omega_3)}.$$

Das Vorzeichen der Wurzeln ist durch die Gleichungen

$$\lim_{u=0} u\sqrt{p(u) - e_\lambda} = 1 \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

bestimmt. Daraus folgt

$$(5) \qquad \begin{cases} \sigma_1(u, \omega'_1, \omega'_3) = \sigma_\lambda(u, \omega_1, \omega_3) \\ \sigma_2(u, \omega'_1, \omega'_3) = \sigma_\mu(u, \omega_1, \omega_3) \\ \sigma_3(u, \omega'_1, \omega'_3) = \sigma_\nu(u, \omega_1, \omega_3). \end{cases}$$

Die Funktionen $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ werden also infolge der Periodentransformation (1) in derselben Weise permutiert wie die Größen $e_1 e_2 e_3$.

Insbesondere ergibt sich:

Wenn die Substitutionskoeffizienten α und δ ungerade, die Substitutionskoeffizienten β und γ gerade sind (4, I), so bleiben die drei Funktionen $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ ungeändert.

Um auch das Verhalten der vier Funktionen H, H_1, Θ, Θ_1 gegenüber der Periodentransformation festzustellen benutzen wir die Gleichungen (5) und (10) des § 55.

$$(6) \qquad \begin{cases} H(u) = H'(0) e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \sigma(u) \quad H_1(u) = H_1(0) e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \sigma_1(u) \\ \Theta(u) = \Theta(0) e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \sigma_3(u) \quad \Theta_1(u) = \Theta_1(0) e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \sigma_2(u). \end{cases}$$

Das Verhalten der Funktionen $\sigma_\nu(u)$ bei einer Periodentransformation ist im vorhergehenden festgestellt, und das Verhalten des Exponentialfaktors ist leicht zu übersehen; es bleibt daher nur zu untersuchen, wie sich die von der Variabeln u unabhängigen Faktoren verhalten.

...rößen ω_1 und $\frac{\omega_3}{i}$ seien reell und ...setzung sind die Größen

$$\text{und} \quad q^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\pi \omega_3 i}{4 \omega_1}}$$

...e

$$= e^{\frac{\pi(\omega_1 + \omega_3) i}{\omega_1}} = -q$$

...rodukt

$$q'^{\frac{1}{4}} = q^{\frac{1}{4}}$$

...20) bis (22) des vorigen Para... auf die Gleichungen (1) bis (4)

$$(0/\omega_1, \omega_3) \quad \Theta_1(0/\omega_1, \omega_3)$$

$$\Theta_1(0/\omega'_1, \omega_3')$$

...odukt

$$0/\omega_1', \omega_3')$$

Folglich ist

$$-1 \quad \varepsilon_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}$$

$$= e^{\frac{\pi i}{4}}.$$

...die Gleichungen

$$\ldots_1 + \omega_3) = \sqrt{i} H(u/\omega_1, \omega_3)$$
$$\ldots \omega_1 + \omega_3) = \sqrt{i} H_1(u/\omega_1, \omega_3)$$
$$\ldots \omega_1 + \omega_3) = \Theta_1(u/\omega_1, \omega_3)$$
$$\ldots \omega_1 + \omega_3) = \Theta(u/\omega_1, \omega_3).$$

...ution (8) werden die Größen e_1 und

Aus der Gleichung (23) des vorigen Paragraphen folgt, daß die 8-te Potenz der Größe

$$\sqrt{\frac{\pi}{\omega_1}}\,H'(0)$$

bei einer Periodentransformation ungeändert bleibt, und aus (20) bis (22) daß die 8-ten Potenzen der drei Größen

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\omega_1}}\,H_1(0) \quad \sqrt{\frac{\pi}{2\omega_1}}\,\Theta(0) \quad \sqrt{\frac{\pi}{2\omega_1}}\,\Theta_1(0)$$

in leicht zu übersehender Weise untereinander permutiert werden.

Die Bestimmung der noch zu ermittelnden 8-ten Einheitswurzeln wollen wir nur für die beiden Substitutionen

$$\omega'_1 = \omega_1 \quad \omega'_3 = \omega_1 + \omega_3 \tag{7}$$

und

$$\omega'_1 = \omega_3 \quad \omega'_3 = -\omega_1 \tag{8}$$

aus denen sich alle anderen zusammensetzen lassen, durchführen (vgl. § 39).

Im Fall der Substitution (7) werden die beiden Größen e_2 und e_3 miteinander vertauscht (4, II). Wir machen deshalb den Ansatz (vgl. (6))

$$\left\{\begin{aligned} H'(0, \omega'_1, \omega'_3) &= \varepsilon\, H'(0, \omega_1, \omega_3) \\ H_1(0, \omega'_1, \omega'_3) &= \varepsilon_1\, H_1(0, \omega_1, \omega_3) \\ \Theta_1(0, \omega'_1, \omega'_3) &= \varepsilon_2\, \Theta(0, \omega_1, \omega_3) \\ \Theta(0, \omega'_1, \omega'_3) &= \varepsilon_3\, \Theta_1(0, \omega_1, \omega_3) \end{aligned}\right. \tag{9}$$

ε, ε_1, ε_2, ε_3 bedeuten 8-te Einheitswurzeln.

Aus der Relation (§ 63, 24)

$$H'(0) = \frac{\pi}{2\omega_1}\,H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0) \tag{10}$$

folgt

$$\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \tag{11}$$

Aus Stetigkeitsbetrachtungen ergibt sich, daß die vier in Rede stehenden Einheitswurzeln sich nicht ändern, wenn sich die Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$ stetig ändern, vorausgesetzt daß der imaginäre Teil der Periodenquotienten $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ positiv imaginär bleibt.

Nehmen wir an, die Größen ω_1 und $\frac{\omega_3}{i}$ seien reell und positiv. Unter dieser Voraussetzung sind die Größen

$$q = e^{\frac{\pi \omega_3 i}{\omega_1}} \quad \text{und} \quad q^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\pi \omega_3 i}{4 \omega_1}}$$

reell und positiv. Die Größe

$$q' = e^{\frac{\pi \omega_3' i}{\omega_1'}} = e^{\frac{\pi(\omega_1 + \omega_3) i}{\omega_1}} = -q$$

ist reell und negativ, das Produkt

$$e^{-\frac{\pi i}{4}} q'^{\frac{1}{4}} = q^{\frac{1}{4}}$$

ist reell und positiv.

Aus den Gleichungen (20) bis (22) des vorigen Paragraphen folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (1) bis (4) des § 62, daß die Größen

$$H_1(0/\omega_1, \omega_3) \quad \Theta(0/\omega_1, \omega_3) \quad \Theta_1(0/\omega_1, \omega_3)$$

und die Größen

$$\Theta(0/\omega'_1, \omega_3') \quad \Theta_1(0/\omega'_1, \omega_3')$$

reell und positiv sind; das Produkt

$$e^{-\frac{\pi i}{4}} H_1(0/\omega_1', \omega_3')$$

ist ebenfalls reell und positiv. Folglich ist

$$\varepsilon_2 = 1 \quad \varepsilon_3 = 1 \quad \varepsilon_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}$$

und wegen (11) auch

$$\varepsilon = e^{\frac{\pi i}{4}}.$$

Wir erhalten demnach die Gleichungen

$$(12)\quad \begin{cases} H(u/\omega_1, \omega_1 + \omega_3) = \sqrt{i}\, H(u/\omega_1, \omega_3) \\ H_1(u/\omega_1, \omega_1 + \omega_3) = \sqrt{i}\, H_1(u/\omega_1, \omega_3) \\ \Theta(u/\omega_1, \omega_1 + \omega_3) = \Theta_1(u/\omega_1, \omega_3) \\ \Theta_1(u/\omega_1, \omega_1 + \omega_3) = \Theta(u/\omega_1, \omega_3). \end{cases}$$

Im Fall der Substitution (8) werden die Größen e_1 und e_3 vertauscht. (4, III.)

Es ist demnach

$$
(13)\quad \begin{cases}
H'(0/\omega_1', \omega_3') = \varepsilon \sqrt{\frac{\omega_1'}{\omega_1}}\, H'0(/\omega_1, \omega_3) \\
H_1(0/\omega_1', \omega_3') = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\omega_1'}{\omega_1}}\, \Theta(0/\omega_1, \omega_3) \\
\Theta_1(0/\omega_1', \omega_3') = \varepsilon_2 \sqrt{\frac{\omega_1'}{\omega_1}}\, \Theta_1(0/\omega_1, \omega_3) \\
\Theta(0/\omega_1', \omega_3') = \varepsilon_3 \sqrt{\frac{\omega_1'}{\omega_1}}\, H_1(0/\omega_1, \omega_3).
\end{cases}
$$

Nehmen wir wieder, um die Einheitswurzeln zu bestimmen, an, die Größen ω_1 und ω_3/i seien reell und positiv; unter dieser Voraussetzung sind die Größen

$$q = e^{\frac{\pi\omega_3 i}{\omega_1}} \quad \text{und} \quad q' = e^{\frac{\pi\omega_3' i}{\omega_1'}} = e^{-\frac{\pi\omega_1 i}{\omega_3}}$$

beide reell und positiv und dasselbe gilt für die Größen

$$q^{\frac{1}{4}} \quad \text{und} \quad q'^{\frac{1}{4}}.$$

Folglich sind die in Rede stehenden Nullwerte der Funktionen H_1, Θ, Θ_1 sämtlich reell und positiv (vgl. die Bemerkung am Schluß des vorigen Paragraphen), daher sind die Produkte

$$\varepsilon_\nu \sqrt{\frac{\omega_1'}{\omega_1}} = \varepsilon_\nu \sqrt{-\frac{\omega_3}{\omega_1}} \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

positiv, folglich ist

$$\varepsilon_\nu \sqrt{\frac{\omega_1'}{\omega_1}} = \sqrt{-i\frac{\omega_3}{\omega_1}}$$

wo die rechts stehende Quadratwurzel positiv zu nehmen ist.

Der reelle Teil der Größe

$$-i\frac{\omega_3}{\omega_1}$$

ist für alle zulässigen Werte der Perioden positiv. Folglich ist für alle in Betracht kommenden Werte der Größen ω_1, ω_3

$$(14)\qquad \varepsilon_\nu \sqrt{\frac{\omega_1'}{\omega_1}} = \sqrt{-i\frac{\omega_3}{\omega_1}}$$

zu setzen. Die Quadratwurzel ist so zu wählen, daß ihr reeller Teil positiv ist.

Auf Grund der Gleichung (10) ergibt sich

$$\varepsilon\sqrt{\frac{\omega_1'}{\omega_1}} = -i\sqrt{-i\frac{\omega_3}{\omega_1}}. \tag{15}$$

Infolge der Transformation (8) tritt an Stelle der Exponentialfunktion

$$e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2}$$

die Funktion

$$e^{-\frac{\eta_1'}{2\omega_1'}u^2} = e^{-\frac{\eta_3}{2\omega_3}u^2}.$$

Infolge der Legendreschen Relation ist

$$\frac{\eta_1}{2\omega_1} - \frac{\eta_3}{2\omega_3} = \frac{\pi i}{4\omega_1\omega_3}.$$

Aus den Gleichungen (6) ergibt sich nun mit Rücksicht auf (13), (14) und (15)

$$(16)\left\{\begin{aligned}
H(u/\omega_3, -\omega_1) &= -i\sqrt{-i\frac{\omega_3}{\omega_1}}\, e^{\frac{\pi i u^2}{4\omega_1\omega_3}} H(u/\omega_1, \omega_3),\\
H_1(u/\omega_3, -\omega_1) &= \sqrt{-i\frac{\omega_3}{\omega_1}}\, e^{\frac{\pi i u^2}{4\omega_1\omega_3}} \Theta(u/\omega_1, \omega_3),\\
\Theta(u/\omega_3, -\omega_1) &= \sqrt{-i\frac{\omega_3}{\omega_1}}\, e^{\frac{\pi i u^2}{4\omega_1\omega_3}} H_1(u/\omega_1, \omega_3),\\
\Theta_1(u/\omega_3, -\omega_1) &= \sqrt{-i\frac{\omega_3}{\omega_1}}\, e^{\frac{\pi i u^2}{4\omega_1\omega_3}} \Theta_1(u/\omega_1, \omega_3).
\end{aligned}\right.$$

Unter

$$\sqrt{-i\frac{\omega_3}{\omega_1}}$$

ist der Wert der Wurzel zu verstehen, dessen reeller Teil positiv ist.

§ 65. Die verschiedenen Bezeichnungsweisen der ϑ-Funktionen. Die Funktionen H und Θ hat Jacobi in seinen „Fundamenta nova theoriae funktionum ellipticarum" eingeführt (Werke, Bd. 1), wie schon oben gelegentlich bemerkt worden ist. Als unabhängige Variable tritt aber nicht das Weierstraßsche Normalintegral erster Gattung u, sondern das Legendresche Normalintegral

$$v = \sqrt{e_1 - e_3}\, u$$

auf (vgl. § 11). Dementsprechend treten an Stelle der Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$ die Perioden

$$2K = \sqrt{e_1 - e_3} \cdot 2\omega_1 \quad \text{und} \quad 2iK' = \sqrt{e_1 - e_3} \cdot 2\omega_3 .$$

Weil die Funktionen H und Θ in den Größen u, ω_1, ω_3 homogen vom Grade Null sind (§ 61), so zieht diese Änderung der Variabeln keine wesentliche Änderung der im vorausgehenden entwickelten Formeln nach sich. Man hat in den Formeln des § 61 einfach die Quotienten

$$\frac{\pi u}{\omega_1} \quad \text{und} \quad \frac{\pi \omega_3 i}{\omega_1}$$

durch

$$\frac{\pi v}{K} \quad \text{und} \quad -\frac{\pi K'}{K}$$

zu ersetzen. Nur die Werte der Derivierten erfahren eine Änderung: an Stelle der Derivierten

$$\frac{dH}{du} \text{ ist nunmehr die Derivierte } \frac{dH}{dv} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \frac{dH}{du}$$

einzuführen.

Während die Halbperioden ω_1 und ω_3 unabhängig variabel sind, besteht zwischen den Halbperioden K und iK' eine Relation. Aus der Gleichung (21) des § 63 folgt:

$$(1) \qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = Q Q_2^2 = \Theta_1(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots .$$

Auf Grund dieser Gleichung können wir die Gleichung (24) des § 63 umformen. Diese Gleichung lautet, wenn wir v als unabhängige Variable einführen:

$$\lim_{v=0} \frac{H(v)}{v} = \frac{\pi}{2K} H_1(0)\, \Theta(0)\, \Theta_1(0).$$

Eliminieren wir K, so folgt

$$(2) \qquad \lim_{v=0} \frac{H(v)}{v} = \frac{H_1(0)\, \Theta(0)}{\Theta_1(0)} .$$

Auch die Formeln (16) des vorigen Paragraphen lassen sich bei Benutzung der Jacobischen Bezeichnung in bemerkenswerter Weise umformen.

Wir ersetzen auf der rechten Seite die Größen u, ω_1, ω_3 beziehungsweise durch iv, K, iK'; auf der linken Seite beziehungsweise durch v, $-iK$, K'. Dies ist zulässig, weil die in Betracht kommenden Funktionen in den Größen u, ω_1, ω_3 homogen vom Grade Null sind. Die rechts voranstehenden Faktoren bringen wir auf die andere Seite. Wir erhalten

$$(3)\quad \begin{cases} H(iv/K, iK') = i\sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{\frac{\pi v^2}{4KK'}}\, H(v/K', iK), \\ H_1(iv/K, iK') = \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{\frac{\pi v^2}{4KK'}}\, \Theta(v/K', iK), \\ \Theta(iv/K, iK') = \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{\frac{\pi v^2}{4KK'}}\, H_1(v/K', iK), \\ \Theta_1(iv/K, iK') = \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{\frac{\pi v^2}{4KK'}}\, \Theta_1(v/K', iK). \end{cases}$$

Das Vorzeichen der Wurzel

$$\sqrt{\frac{K}{K'}}$$

ist so zu wählen, daß ihr reeller Teil positiv ist.

In den Vorlesungen über elliptische Funktionen, die den Schluß des ersten Bandes seiner gesammelten Werke bilden, behandelt Jacobi die in Rede stehenden Funktionen als Funktionen der beiden Variabeln

$$x = \frac{\pi u}{2\omega_1} = \frac{\pi v}{2K} \quad \text{und} \quad q = e^{\frac{\pi\omega_3 i}{\omega_1}} = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$$

und benutzt die Bezeichnungen

$$\vartheta(x) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x \ldots$$

$$\vartheta_1(x) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x \ldots$$

$$\vartheta_2(x) = \vartheta_1\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x \ldots$$

$$\vartheta_3(x) = \vartheta\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x \ldots$$

Es ist also (§ 61)

$$\vartheta\left(\frac{\pi u}{2\omega_1}\right) = \Theta(u) \quad \vartheta_1\left(\frac{\pi u}{2\omega_1}\right) = H(u)$$

$$\vartheta_3\left(\frac{\pi u}{2\omega_1}\right) = \Theta_1(u) \quad \vartheta_2\left(\frac{\pi u}{2\omega_1}\right) = H_1(u).$$

Weierstraß schreibt $\vartheta_0\left(\frac{x}{\pi}\right)$ an Stelle von $\vartheta(x)$ und $\vartheta_\nu\left(\frac{x}{\pi}\right)$ an Stelle von $\vartheta_\nu(x)$, $(\nu = 1, 2, 3)$. Er wählt also

$$x = \frac{u}{2\omega_1}$$

als unabhängige Variable. Außerdem bezeichnet Weierstraß die Jacobische Konstante

$$q = e^{\frac{\pi \omega_3 i}{\omega_1}}$$

mit h.

Halphen folgt in seinem Traité des fonctions elliptiques der Weierstraßschen Bezeichnungsweise.

Vielfach nimmt man die Charakteristik in die Bezeichnung auf, schreibt also

$$\Theta_{00}(x) \qquad \Theta_{01}(x) \qquad \Theta_{10}(x) \qquad \Theta_{11}(x)$$

statt

$$\vartheta_3(x) \qquad \vartheta(x) \qquad \vartheta_2(x) \qquad \vartheta_1(x).$$

Dieser Bezeichnungsweise bedient sich H. Weber in seinen elliptischen Funktionen.

§ 66. Die Jacobischen Funktionen sn v, cn v, dn v.

Durch die Funktionen $H(v)$, $H_1(v)$, $\Theta(v)$, $\Theta_1(v)$ lassen sich die Jacobischen Funktionen sn (v), cn (v), dn (v) (vgl. § 13) sehr leicht ausdrücken. Wir setzen nach Jacobis Vorgang

$$(1) \qquad \operatorname{sn} v = \frac{\Theta_1(0)}{H_1(0)} \frac{H(v)}{\Theta(v)} \qquad \operatorname{cn} v = \frac{\Theta(0)}{H_1(0)} \frac{H_1(v)}{\Theta(v)} \qquad \operatorname{dn} v = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)} \frac{\Theta_1(v)}{\Theta(v)},$$

$$\left(v = \sqrt{e_1 - e_3}\, u \qquad K = \sqrt{e_1 - e_3}\, \omega_1 \qquad iK' = \sqrt{e_1 - e_3}\, \omega_3\right).$$

Die multiplikativen Konstanten in den vorstehenden Gleichungen sind so gewählt, daß

$$\operatorname{cn} 0 = 1 \qquad \operatorname{dn} 0 = 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{sn} K = 1$$

ist. Die Funktionen cn v und dn v sind gerade, sn v ist ungerade.

Der Zusammenhang der Jacobischen Funktionen mit der Weierstraßschen $\wp$-Funktion ergibt sich aus den Entwicklungen der §§ 54 und 55. Aus der Gleichung (9) des § 54 und den Gleichungen (10) des § 55 folgt

$$(2) \qquad \operatorname{cn} v = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\sqrt{\wp(u) - e_1}}{\sqrt{\wp(u) - e_3}} \qquad \operatorname{dn} v = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\sqrt{\wp(u) - e_2}}{\sqrt{\wp(u) - e_3}}.$$

Aus der Gleichung (5) des § 55 in Verbindung mit der Gleichung (10) desselben Paragraphen folgt

$$\operatorname{sn} v = \text{Konst.}\,\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\text{Konst.}}{\sqrt{p(u) - e_3}}.$$

Um die Konstante zu bestimmen, setzen wir

$$u = \omega_1 \qquad v = K.$$

Wegen $\operatorname{sn} K = 1$, $p(\omega_1) = e_1$ erhalten wir

$$\operatorname{sn} v = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{p(u) - e_3}}. \tag{3}$$

Damit sind wir auf einem ganz anderen Weg wieder zu den Formeln des § 13 gelangt.

An Stelle der von Weierstraß gebrauchten Funktion

$$\zeta(u) = \frac{d \log \sigma(u)}{du}$$

tritt bei Jacobi die Funktion

$$Z(v) = \frac{d \log \Theta(v)}{dv}$$

auf. Aus der zweiten der Gleichungen (17) des § 55 folgt

$$\frac{d \log \Theta(u)}{du} = \frac{\pi i}{2\omega_1} + \frac{d \log H(u + \omega_3)}{du}$$

und aus der Gleichung (5) desselben Paragraphen folgt

$$\frac{d \log H(u + \omega_3)}{du} = -\frac{\eta_1}{\omega_1}(u + \omega_3) + \frac{d \log \sigma(u + \omega_3)}{du}.$$

Wir erhalten daher mit Rücksicht auf die Legendresche Relation

$$\frac{d \log \Theta(v)}{dv} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}\,\frac{d \log \Theta(u)}{du} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}\left[\frac{d \log \sigma(u + \omega_3)}{du} - \frac{\eta_1}{\omega_1}u - \eta_3\right]$$

und hieraus folgt

$$Z(v) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}\left[\zeta(u + \omega_3) - \frac{\eta_1}{\omega_1}u - \eta_3\right]. \tag{4}$$

Durch diese Gleichung wird die Jacobische Funktion $Z(v)$ auf die Weierstraßsche Funktion $\zeta(u)$ zurückgeführt.

Differenzieren wir die Gleichung (4) nach v, so folgt (§ 49, Nr. 11)

$$Z'(v) = \frac{d^2 \log \Theta(v)}{dv^2} = \frac{1}{e_1 - e_3}\left[-p(u + \omega_3) - \frac{\eta_1}{\omega_1}\right].$$

Nun ist (§ 52, Nr. 9)

$$\frac{p(u+\omega_3)-e_3}{e_1-e_3} = \frac{e_2-e_3}{p(u)-e_3} = k^2 \operatorname{sn}^2 v \qquad (3)$$

folglich

$$Z'(v) = -k^2 \operatorname{sn}^2 v - \frac{1}{e_1-e_3}\left(e_3 + \frac{\eta_1}{\omega_1}\right),$$

wofür wir auch schreiben können

$$(5) \qquad k^2 \operatorname{sn}^2 v = Z'(0) - Z'(v).$$

Weil die Funktion $\Theta(v)$ gerade ist, ist $\Theta'(0) = 0$, folglich

$$Z'(0) = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}.$$

Aus (5) folgt daher

$$(6) \qquad k^2 \int_0^v \operatorname{sn}^2 v\, dv = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} v - \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}.$$

Anstatt die Jacobischen Funktionen auf die Funktionen $\sqrt{p(u)-e_\nu}$ zurückzuführen, kann man ihre Theorie auch independent entwickeln, indem man sich auf die Eigenschaften der Funktionen H, H_1, Θ, Θ_1 stützt. Diese letzteren kann man entweder durch die Reihen des § 61 definieren, oder man kann von den charakteristischen Eigenschaften der allgemeinen ϑ-Funktion ausgehend durch Spezialisierung zu ihnen gelangen. Den ersteren Weg hat Jacobi in seinen schon genannten Vorlesungen eingeschlagen: den letzteren Weg, den die Entwicklung der Funktionentheorie eröffnet hat, kann man in H. Webers Lehrbuch verfolgen.

Wir wollen im folgenden kurz darlegen, wie sich aus den im vorausgehenden nachgewiesenen Eigenschaften der Jacobischen ϑ-Funktionen die Sätze über die Jacobischen elliptischen Funktionen ergeben, die in den §§ 13 bis 15 entwickelt worden sind.

Aus den Gleichungen (11) bis (14) des § 55 ergeben sich ihre Periodizitätseigenschaften. Sie sprechen sich in den Gleichungen aus:

$$(7) \begin{cases} \operatorname{sn}(v+2K) = -\operatorname{sn} v, \quad \operatorname{cn}(v+2K) = -\operatorname{cn} v, \\ \operatorname{dn}(v+2K) = \operatorname{dn} v. \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} \operatorname{sn}(v+2iK') = \operatorname{sn} v, \quad \operatorname{cn}(v+2iK') = -\operatorname{cn} v, \\ \operatorname{dn}(v+2iK') = -\operatorname{dn} v. \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} \operatorname{sn}(v+2K+2iK') = -\operatorname{sn} v, \quad \operatorname{cn}(v+2K+2iK') = \operatorname{cn} v, \\ \operatorname{dn}(v+2K+2iK') = -\operatorname{dn} v. \end{cases}$$

Die drei Jacobischen Funktionen gehören demnach zu den elliptischen Funktionen zweiter Art (vgl. § 56). Ihre Quadrate besitzen die beiden Perioden $2K$ und $2iK'$. Die Funktionen selbst besitzen die folgenden Perioden:

(10)

Funktion	Perioden		
sn v	$4K$	$2iK'$	$4K+4iK'$
cn v	$4K$	$4iK'$	$2K+2iK'$
dn v	$2K$	$4iK'$	$4K+4iK'$

Die drei Funktionen besitzen dieselben Unstetigkeitspunkte (1),

(11) $\quad 2\lambda K + (2\mu + 1)iK' \quad (\lambda, \mu$ ganze Zahlen),

es sind das die Nullpunkte der Funktion $\Theta(v)$ (§ 55, Nr. 19). Ihre Nullpunkte stimmen beziehungsweise mit den Nullpunkten der drei Funktionen $H(v)$, $H_1(v)$, $\Theta_1(v)$ überein. Wir wollen sie ebenfalls übersichtlich zusammenstellen:

(12)

Funktion	Nullpunkte
sn v	$2\lambda K + 2\mu iK'$
cn v	$(2\lambda+1)K + 2\mu iK'$
dn v	$(2\lambda+1)K + (2\mu+1)iK'$

Den Beziehungen zwischen den vier Funktionen H, H_1, Θ, Θ_1, die in den Gleichungen (17) und (18) des § 55 ihren Ausdruck finden, entsprechen Beziehungen zwischen den drei Funktionen sn, cn, dn.

Um die betreffenden Formeln einfacher schreiben zu können, definieren wir zwei Größen k und k' durch die Gleichungen

$$(13) \quad \sqrt{k} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)} \quad \text{(vgl. § 63, Nr. 14 bis 16).}$$

Aus den oben genannten Gleichungen folgt mit Rücksicht auf (1)

$$(14)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(v+K)=\dfrac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v}, \quad \operatorname{cn}(v+K)=-k'\dfrac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v}, \\ \operatorname{dn}(v+K)=\dfrac{k'}{\operatorname{dn} v}. \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(v+iK')=\dfrac{1}{k \operatorname{sn} v}, \quad \operatorname{cn}(v+iK')=-i\dfrac{\operatorname{dn} v}{k \operatorname{sn} v}, \\ \operatorname{dn}(v+iK')=-i\dfrac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{sn} v}. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungssystemen folgt weiter

$$(16)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(v+K+iK')=\dfrac{\operatorname{dn} v}{k \operatorname{cn} v}, \quad \operatorname{cn}(v+K+iK')=-\dfrac{ik'}{k \operatorname{cn} v}, \\ \operatorname{dn}(v+K+iK')=ik'\dfrac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{cn} v}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (16) und (17) des § 56 ergeben sich bei Benutzung der Bezeichnungen (10) die folgenden Relationen zwischen den Quadraten der drei Funktionen sn, cn und dn:

$$(17)\qquad \operatorname{sn}^2 v+\operatorname{cn}^2 v=1, \qquad k^2 \operatorname{sn}^2 v+\operatorname{dn}^2 v=1.$$

Für $v=K$ ist $\operatorname{sn} v=1$, $\operatorname{dn} v=k'$ (1), folglich ist

$$(18)\qquad k^2+k'^2=1.$$

Aus den Gleichungen (3) des vorigen Paragraphen folgt mit Rücksicht auf (1):

$$(19)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(iv/K, iK')=i\dfrac{\operatorname{sn}(v/K', iK)}{\operatorname{cn}(v/K', iK)}. \\ \operatorname{cn}(iv/K, iK')=\dfrac{1}{\operatorname{cn}(v/K', iK)}, \\ \operatorname{dn}(iv/K, iK')=\dfrac{\operatorname{dn}(v/K', iK)}{\operatorname{cn}(v/K', iK)}. \end{cases}$$

Aus der Schlußgleichung des § 56 ergibt sich sofort das Additionstheorem der Funktion sn v:

$$(20)\qquad \operatorname{sn}(v+v_1)=\frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v_1 \operatorname{dn} v_1+\operatorname{sn} v_1 \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2 v_1} \qquad \text{(vgl. § 14).}$$

Das Additionstheorem der Funktionen cn v und dn v kann man in derselben Art beweisen.

Mittelst des Additionstheorems läßt sich leicht der Differentialquotient der Funktion sn v berechnen. Wir setzen einen Augenblick zur Abkürzung

$$\lim_{v=0} \frac{\operatorname{sn} v}{v} = h, \tag{21}$$

und bemerken, daß der Grenzwert

$$\lim_{v=0} \frac{1 - \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{v^2}$$

endlich ist; denn die beiden Funktionen $\operatorname{cn} v$ und $\operatorname{dn} v$ sind gerade und nehmen für $v = 0$ den Wert 1 an. Eine einfache Rechnung ergibt

$$\lim_{v_1 = 0} \frac{\operatorname{sn}(v + v_1) - \operatorname{sn} v}{v_1} = \frac{d \operatorname{sn} v}{d v} = h \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v. \tag{22}$$

Da die Funktion $\operatorname{sn} v$ in den drei Größen v, K, K' homogen vom Grad Null ist, so ist die Größe h (21) eine homogene Funktion der Größen K und K' vom Grade -1. Wir können deshalb den Wert des Quotienten K'/K festhaltend über die Größe K derart verfügen, daß die Größe h einen vorgeschriebenen Wert annimmt. Wir wollen K so wählen, daß die Gleichung (2) des vorigen Paragraphen erfüllt ist. Unter dieser Voraussetzung ist wegen (21) und (1)

$$h = \frac{\Theta_1(0)}{H_1(0)\,\Theta(0)} \lim_{v=0} \frac{H(v)}{v} = 1$$

und die Gleichung (22) lautet

$$\frac{d \operatorname{sn} v}{d v} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v. \tag{23}$$

Aus den Gleichungen (17) folgt sodann

$$\frac{d \operatorname{cn} v}{d v} = -\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v, \qquad \frac{d \operatorname{dn} v}{d v} = -k^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v. \tag{24}$$

Bezüglich der Realitätsverhältnisse ist zu bemerken: wenn die Größen K und K' reell sind, so entsprechen reellen Werten der Variabeln v reelle Werte der Funktionen $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$. Rein imaginären Werten der Variabeln entsprechen reelle Werte der Funktionen $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ und rein imaginäre Werte der Funktion $\operatorname{sn} v$ (19).

Den Jacobischen Funktionen $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ gegenüber bietet die von Weierstraß eingeführte Funktion $\wp(u)$ den Vorteil, daß sie unabhängig von der Wahl des primitiven Periodenpaares ist; den Jacobischen Funktionen kommt diese Eigenschaft der Invarianz nicht zu.

Dagegen erweist sich bei vielen Untersuchungen der enge Zusammenhang als vorteilhaft, in dem die Jacobischen Funktionen mit den ϑ-Funktionen stehen, und außerdem sind diese Funktionen in hohem Maße den Bedürfnissen angepaßt, die bei der Anwendung der elliptischen Funktionen auf Probleme der mathematischen Physik hervortreten.

§ 67. Ausartungen der elliptischen Funktionen.

Wir haben bisher durchweg an der Voraussetzung festgehalten, daß die Diskriminante

$$G = g_2^3 - 27 g_3^2 = 16 (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2 (e_1 - e_2)^2$$

von Null verschieden ist. Unter dieser Voraussetzung ist der reelle Teil des Quotienten $\omega_3 i / \omega_1$ von Null verschieden und negativ, und umgekehrt ist dies die ausreichende Bedingung dafür, daß die Diskriminante nicht verschwindet (vgl. § 62, Nr. 1 und § 63, Nr. 12).

Wir wollen nun zusehen, wie sich die elliptischen Funktionen verhalten, wenn die Diskriminante gegen Null konvergiert. Dabei beschränken wir uns der Einfachheit wegen auf den Fall, daß die Größen e_1, e_2, e_3 reell sind und wir halten an der Annahme fest, daß $e_1 > e_2 > e_3$ ist.

Nehmen wir zunächst an, die Differenz $e_2 - e_3$ sei unendlich klein, während die Differenz $e_1 - e_2$ einen endlichen Wert besitzt. Unter dieser Annahme ist der Modul

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}}$$

unendlich klein, der komplementäre Modul

$$k' = \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}}$$

ist unendlich wenig von 1 verschieden.

In erster Annäherung ist die Halbperiode

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} = \frac{\pi}{2}$$

und die Größe

$$K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k'^2 t^2)}} = \log \frac{4}{k}$$

(s. § 19, Nr. 19; in dieser Formel sind die Buchstaben k und k'; K und K' zu vertauschen).

Hieraus folgt

$$(1)\qquad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}} = \frac{k^2}{16}.$$

Die Formeln (6) bis (9) des § 61 ergeben, wenn man an Stelle der unabhängigen Variabeln u die Variable v einführt

$$(2)\qquad \begin{cases} \Theta_1(v) = 1 & \Theta(v) = 1 \\ H_1(v) = \sqrt{k}\cos v & H(v) = \sqrt{k}\sin v. \end{cases}$$

Hieraus folgt weiter (Gl. (1) des vorigen Paragraphen)

$$(3)\qquad \operatorname{sn} v = \sin v \quad \operatorname{cn} v = \cos v \quad \operatorname{dn} v = 1.$$

Aus der Gleichung (3) des vorigen Paragraphen folgt:

$$(4)\qquad p(u) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2 v}.$$

Nun ist näherungsweise

$$e_1 + 2e_3 = 0,$$

$$(e_1 - e_3)\omega_1^2 = K^2 = \frac{\pi^2}{4},$$

also

$$v = \sqrt{e_1 - e_3}\, u = \frac{\pi u}{2\omega_1} \qquad e_3 = -\frac{\pi^2}{12\omega_1^2}.$$

Wir können deshalb der Gleichung (4) auch die Form geben

$$(5)\qquad p(u) = -\frac{\pi^2}{12\omega_1^2} + \frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega_1}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt sodann

$$(6)\qquad \zeta(u) = -\int p(u)\,du = \frac{\pi^2}{12\omega_1^2}u + \frac{\pi}{2\omega_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2\omega_1} \quad *)$$

und weiter

$$(7)\qquad \sigma(u) = e^{\int \zeta(u)\,du} = e^{\frac{\pi^2}{24\omega_1^2}u^2}\,\frac{2\omega_1}{\pi}\sin\frac{\pi u}{2\omega_1} \quad **).$$

Nehmen wir nun in zweiter Linie an, die Differenz $e_1 - e_2$ sei unendlich klein, die Differenz $e_2 - e_3$ dagegen endlich. Unter

*) Der Wert der Integrationskonstanten ergibt sich auf Grund der Bemerkung, daß $\zeta(u)$ eine ungerade Funktion ist.

**) Die Integrationskonstante wird durch die Bedingung $\lim\limits_{u=0}\frac{\sigma(u)}{u} = 1$ bestimmt.

dieser Annahme ist der komplementäre Modul k' unendlich klein und der Modul k unendlich wenig von 1 verschieden. Wir erhalten daher in erster Annäherung

$$K = \log \frac{4}{k'} \qquad K' = \frac{\pi}{2}.$$

Aus den Formeln (19) des vorigen Paragraphen folgt mit Rücksicht auf (3)

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(v/K, iK') &= -i\frac{\operatorname{sn}(iv/K', iK)}{\operatorname{cn}(iv/K', iK)} = -i \operatorname{tg} iv, \\ \operatorname{cn}(v/K, iK') &= \frac{1}{\operatorname{cn}(iv/K', iK)} = \frac{1}{\cos iv}, \\ \operatorname{dn}(v/K, iK') &= \frac{\operatorname{dn}(iv/K', iK)}{\operatorname{cn}(iv/K', iK)} = \frac{1}{\cos iv}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also im vorliegenden Fall die Näherungsformeln

$$(8) \qquad \operatorname{sn} v = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} \qquad \operatorname{cn} v = \operatorname{dn} v = \frac{2}{e^v + e^{-v}}.$$

Die Funktion $p(u)$ ist einer Periodentransformation gegenüber invariant und sie ist homogen vom Grade -2 in den Größen u, ω_1, ω_3. Folglich ist

$$p(u/\omega_1, \omega_3) = p(u/\omega_3, -\omega_1) = -p(-iu/-i\omega_3, i\omega_1).$$

Wir setzen $\omega_3 = i\beta$ und erhalten

$$(9) \qquad p(u) = \frac{\pi^2}{12\beta^2} + \frac{\pi^2}{\beta^2} \cdot \frac{1}{\left[e^{\frac{\pi u}{2\beta}} - e^{-\frac{\pi u}{2\beta}}\right]^2}.$$

Aus dieser Gleichung leitet man wie oben Formeln für die Funktionen $\zeta(u)$ und $\sigma(u)$ ab.

Lassen wir zuerst die Differenz $e_2 - e_3$ und dann die Differenz $e_1 - e_2$ gegen Null konvergieren, so wächst erst die Periode $2\omega_3$ und dann die Periode $2\omega_1$ über alle Grenzen. Aus den Gleichungen (5) bis (7) folgt

$$p(u) = \frac{1}{u^2} \qquad \zeta(u) = \frac{1}{u} \qquad \sigma(u) = u.$$

§ 68. Numerische Berechnung elliptischer Funktionen. Wir schließen unsere Ausführungen über die Darstellung der elliptischen Funktionen und ihrer Integrale mit

einigen Bemerkungen über die numerische Berechnung derselben. Wenn der zu berechnende Funktionswert durch das Integral erster Gattung u ausgedrückt ist, so benutzt man zur Berechnung am zweckmäßigsten die ϑ-Reihen (§ 61). Wir wollen den Grad der Konvergenz dieser Reihen abschätzen.

Im letzten Abschnitt werden wir nachweisen, daß das primitive Periodenpaar so gewählt werden kann, daß der reelle Teil des Quotienten $\omega_3/\omega_1 i$ größer als $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist*). Der absolute Betrag der Jacobischen Konstante

$$q = e^{\frac{\pi \omega_3 i}{\omega_1}},$$

die diesem Quotienten entspricht, ist $< \frac{1}{15}$.

Jede beliebige komplexe Größe u läßt sich in der Form

$$u = \alpha \cdot 2\omega_1 + \beta \cdot 2\omega_3$$

darstellen, wo α und β reelle Größen bedeuten.

Werten des Arguments u, die sich um ein Multiplum der Periode $2\omega_3$ unterscheiden, entsprechen Werte der ϑ-Funktionen, die sich um einen leicht zu berechnenden Exponentialfaktor unterscheiden; wir brauchen daher nur Werte der Variabeln in Betracht zu ziehen, für die $|\beta| \leqq \frac{1}{2}$ ist. Der absolute Betrag der Größe

$$z = e^{\frac{\pi i u}{2\omega_1}},$$

nach der die ϑ-Reihen fortschreiten, ist

$$= \left| e^{\frac{\pi \omega_3 i}{\omega_1}\beta} \right| = |q^\beta|.$$

Er liegt also, wenn $|\beta| \leqq \frac{1}{2}$ ist, zwischen

$$|\sqrt{q}| \quad \text{und} \quad \frac{1}{|\sqrt{q}|}.$$

Die ϑ-Reihen konvergieren demnach sehr schnell.

In dem Fall, daß die Periode $2\omega_1$ reell, die Periode $2\omega_3$ rein imaginär ist, können wir für $|q|$ noch eine kleinere obere Grenze angeben.

---

*) Vgl. auch F. Th. S. 192.

Auf Grund der Formeln (16) des § 64 können wir nämlich den Fall, daß $\omega_3 < \omega_1$ ist, auf den Fall, daß $|\omega_3| > |\omega_1|$ ist, zurückführen. Ist die letztere Bedingung erfüllt, so ist wie schon am Schluß des § 61 bemerkt wurde, $|q| < \frac{1}{23}$.

Nehmen wir nunmehr an, die zu berechnenden elliptischen Funktionen oder Integrale seien durch die Größen

$$x \text{ und } s = 2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}$$

ausgedrückt. Um die ϑ-Reihen anwenden zu können, müssen wir zunächst die Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$ bestimmen und dann die Werte der Normalintegrale u berechnen, die den gegebenen Wertsystemen x, s entsprechen. Für den Fall, daß nur reelle Größen in Betracht kommen, haben wir schon im § 19 gezeigt, wie diese beiden Aufgaben durch wiederholte Anwendung der Landenschen Substitution gelöst werden können. Von dieser Substitution kann man auch im allgemeinen Fall Gebrauch machen; wir werden später (§ 103) hierauf zurückkommen. Vorerst wollen wir Reihenentwicklungen herstellen, mittelst deren sich die Berechnung in allen Fällen durchführen läßt und zwar wollen wir mit dem zweiten Teil der Aufgabe beginnen: wir betrachten die Perioden als bekannt und berechnen das Integral erster Gattung

$$(1) \qquad u = \int_{(x,s)}^{\infty}\frac{dx}{s} = \int_{(x,s)}^{\infty}\frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}.$$

Wenn wir den Integrationsweg nicht auf die einfach zusammenhängende Fläche T' beschränken, sondern die Möglichkeit offen lassen, daß er die Querschnitte, die diese Fläche begrenzen, überschreitet, so ist das Integral unendlich-vieldeutig. Die verschiedenen Werte unterscheiden sich um Multipla der Perioden. Für unsere Zwecke genügt es einen beliebigen dieser Werte zu berechnen. Wir brauchen also auf den Integrationsweg nicht zu achten.

Die Bezeichnung der Verzweigungspunkte denken wir uns so gewählt, daß die Seite $e_1 e_3$ die größte Seite des Dreiecks $e_1 e_2 e_3$ ist, oder wenigstens nicht kleiner als eine der beiden anderen.

Unter dieser Voraussetzung sind die absoluten Beträge der Größen

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} \quad \text{und} \quad k' = \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}}$$

< 1 oder höchstens $= 1$. Wenn die Größen e_ν reell sind, so setzen wir wieder $e_1 > e_2 > e_3$ voraus. In diesem Fall ist eine der Größen $k, k' \leqq 1/\sqrt{2}$.

Wir transformieren nun das Integral (1) in die Riemannsche Normalform und zwar wollen wir diese Transformation auf zwei verschiedene Arten ausführen. Wir setzen zunächst

$$(2) \qquad y = \frac{e_1 - e_3}{x - e_3} \qquad t = 2\sqrt{y(1-y)(1-k^2y)} = \frac{\sqrt{e_1 - e_3} \cdot s}{(x - e_3)^2}.$$

Wir erhalten

$$(3) \qquad u = \int_{(x,s)}^{\infty} \frac{dx}{s} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^{(y,t)} \frac{dy}{t}.$$

Sodann setzen wir

$$(4) \qquad y = \frac{x - e_3}{e_2 - e_3} \qquad t = 2\sqrt{y(1-y)(1-k^2y)} = \frac{s}{\sqrt{e_1 - e_3}\,(e_2 - e_3)}.$$

Wir zerlegen das Integral (1) in zwei Teile

$$\int_{(x,s)}^{e_3} \frac{dx}{s} + \int_{e_3}^{\infty} \frac{dx}{s}$$

und erhalten

$$(5) \qquad u = \int_{(x,s)}^{\infty} \frac{dx}{s} = \omega_3 + \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^{(y,t)} \frac{dy}{t}.$$

Da der absolute Betrag des Produktes

$$\frac{e_1 - e_3}{x - e_3} \cdot \frac{x - e_3}{e_2 - e_3} \quad \text{gleich} \quad \left|\frac{1}{k^2}\right|$$

ist, so muß der absolute Betrag eines der beiden Faktoren $\leqq 1/|k|$ sein, folglich muß entweder die Größe y, die in der oberen Grenze des Integrals auf der rechten Seite von (3) vorkommt, oder die Größe y, die in der oberen Grenze des In-

tegrals auf der rechten Seite von (5) vorkommt, der Bedingung

$$(6) \qquad |k^2 y| \leqq |k|$$

genügen.

Wenn die Bedingung (6) erfüllt ist, können wir den unter dem Integralzeichen stehenden Faktor $(1-k^2y)^{-\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Satz entwickeln. Wir erhalten

$$(7) \frac{1}{t} = \frac{1}{2\sqrt{y(1-y)}}\left[1 + \frac{1}{2}k^2y + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4y^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6y^3 + \cdots\right].$$

Das Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{y(1-y)}$ ist durch das Vorzeichen des gegebenen Wertes von t bestimmt, der der oberen Integrationsgrenze entspricht.

Unter Benutzung der Formel

$$\int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{y(1-y)}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\int\frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} - \frac{\sqrt{y(1-y)}}{n}\Big[y^{n-1} +$$

$$+\frac{2n-1}{2n-2}y^{n-2} + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}y^{n-3} +$$

$$+\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)(2n-6)}y^{n-4}\ldots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}\Big]$$

erhalten wir

$$(8) \qquad \int_0^{(y,\,t)} \frac{dy}{2\sqrt{y(1-y)}\,(1-k^2y)} =$$

$$= B\int_0^y \frac{dy}{2\sqrt{y(1-y)}} - \sqrt{y(1-y)}\,[C_0 + C_1y + C_2y^2 + \cdots].$$

Die Koeffizienten haben die folgenden Werte

$$(9) \qquad \begin{cases} B = 1 + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\nu}\right)^2 k^{2\nu} \\[2ex] C_n = \displaystyle\sum_{\nu=n}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\nu}\right)^2 k^{2\nu}. \end{cases}$$

Den Transformationen (2) und (4) können wir zwei analoge an die Seite stellen. Vertauschen wir in den Gleichungen

(2) die Größen e_1 und e_3 und dementsprechend die Größen k und k', so erhalten wir

$$(10)\quad y = \frac{e_1 - e_3}{e_1 - x} \quad t = 2\sqrt{y(1-y)(1-k'^2 y)} = -\frac{i\sqrt{e_1 - e_3}\, s}{(e_1 - x)^2} \text{*)}$$

und aus (3) folgt

$$(11)\qquad u = \int_{(x,s)}^{\infty} \frac{dx}{s} = \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^{(y,t)} \frac{dy}{t}.$$

Nehmen wir dieselben Vertauschungen in den Gleichungen (4) und (5) vor, so erhalten wir

$$(12)\qquad y = \frac{e_1 - x}{e_1 - e_2} \quad t = 2\sqrt{y(1-y)(1-k'^2 y)} =$$
$$= -\frac{is}{\sqrt{e_1 - e_3}\,(e_1 - e_2)}.$$

$$(13)\qquad u = \int_{(x,s)}^{\infty} \frac{dx}{s} = \omega_1 + \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^{(y,t)} \frac{dy}{t}.$$

In den Koeffizienten der Reihenentwicklung (8) ist die Größe k durch k' zu ersetzen, im übrigen bleibt sie unverändert in Geltung.

Der absolute Betrag einer der beiden Größen

$$\frac{e_1 - e_3}{e_1 - x} \quad \text{und} \quad \frac{e_1 - x}{e_1 - e_2}$$

ist notwendig $\leqq \frac{1}{|k'|}$. Folglich führt die eine der beiden Substitutionen (10) oder (12) zu einer konvergenten Reihenentwicklung.

Der Grad der Konvergenz der Reihen, zu denen die Transformationen (2) und (4) führen, wird durch den absoluten Betrag der Größen

$$k^2 y = \frac{e_2 - e_3}{x - e_3} \quad \text{beziehungsweise} \quad k^2 y = \frac{x - e_3}{e_1 - e_3}$$

bedingt. Die Konvergenz der Reihen, zu denen die Trans-

*) Bezüglich des Vorzeichens der Wurzel $\sqrt{e_1 - e_3}$ vgl. § 63, Nr. 8 und 9.

formationen (10) und (12) führen, hängt von dem absoluten Betrag der Größe

$$\frac{e_1 - e_2}{e_1 - x} \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{e_1 - x}{e_1 - e_3}$$

ab. Man wird deswegen diejenige Transformation benutzen, für die der absolute Betrag der betreffenden Größe möglichst klein ausfällt.

Im achten Abschnitt werden wir zeigen, wie sich die Konvergenz der Reihenentwicklungen erheblich steigern läßt.

§ 69. Berechnung eines Paars primitiver Perioden. Setzt man in der Gleichung (8) des vorigen Paragraphen $y = 1$, so erhält man einen Ausdruck für die Jacobische Halbperiode $K = \sqrt{e_1 - e_3}\,\omega_1$; vertauscht man die Größen k und k', so tritt $K' = -i\sqrt{e_1 - e_3}\,\omega_3$ an Stelle von K. Weil der absolute Betrag einer der beiden Größen k^2 und $k'^2 \geqq \frac{1}{2}$ ist, wird wenigstens eine der beiden Reihenentwicklungen nur langsam konvergieren, also zur numerischen Rechnung ungeeignet sein. Wir wollen deshalb zur Bestimmung der Perioden einen anderen Weg einschlagen, der sehr viel schneller zum Ziel führt. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, daß

$$|k| \leqq |k'| \leqq 1$$

ist. Diese Annahme ist gleichbedeutend mit der Annahme, daß die Seiten des Dreiecks $e_1 e_2 e_3$ den Ungleichungen

$$|e_1 - e_3| \geqq |e_1 - e_2| \geqq |e_2 - e_3| \tag{1}$$

genügen.

Wir berechnen zunächst die Jacobische Konstante q. Aus den Gleichungen (20) und (21) des § 63 und den Gleichungen (6) und (8) des § 61 folgt

$$\sqrt{k} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)} = 2q^{\frac{1}{4}} \frac{1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}. \tag{2}$$

Wir setzen

$$\sqrt{k} = \varkappa \quad q^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\pi \omega_3 i}{4\omega_1}} = e^{-\frac{\pi K'}{4K}} = h$$

und erhalten

$$\varkappa = 2h \frac{1 + h^8 + h^{24} + h^{48} + \cdots}{1 + 2h^4 + 2h^{16} + 2h^{36} + \cdots}. \tag{3}$$

Diese Gleichung definiert die Größe $\varkappa$ für die Umgebung des Nullpunkte der h-Ebene als einwertige und stetige Funktionen der komplexen Variabeln h. Für $h = 0$ verschwindet die Derivierte

$$\frac{d\varkappa}{dh}$$

nicht, folglich ist in der Umgebung des Nullpunktes der $\varkappa$-Ebene auch h eine reguläre Funktion der Variabeln $\varkappa$ und kann demnach durch eine Potenzreihe dargestellt werden (vgl. F. Th. § 29 S. 136). Mittelst der Methode der unbestimmten Koeffizienten ergibt sich

$$h = \frac{\varkappa}{2} + 2\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^{13} + \cdots. \tag{4}$$

Wir werden im letzten Abschnitt beweisen, daß die Funktion h der Variabeln $\varkappa$ sich regulär verhält, solange $|\varkappa| < 1$ bleibt. Daraus folgt, daß die Reihe (4) für $|\varkappa| < 1$ konvergiert.

Wenn die Größe k reell ist, so ist der Wurzel $\varkappa = \sqrt{k}$ ihr positiver Wert beizulegen (vgl. die Bemerkung zu den Gleichungen (14) bis (16) des § 63). Aus Stetigkeitsbetrachtungen schließt man, daß im allgemeinen Fall die Wurzel so zu wählen ist, daß ihr reeller Teil positiv ist.

Zu einer schneller konvergierenden Reihe gelangen wir durch die folgende Bemerkung: Aus den Gleichungen (21) und (22) des § 63 und den Gleichungen (6) und (7) des § 61 folgt

$$\sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}.$$

Der reelle Teil der Wurzel $\sqrt{k'}$ ist ebenfalls positiv.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt:

$$\frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = 2q\,\frac{1 + q^8 + q^{24} + \cdots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \cdots}. \tag{5}$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit der Gleichung (3) zeigt, daß die Größe

$$l = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} \tag{6}$$

von der Größe q in derselben Weise abhängt wie die Größe h von der Größe $\varkappa$. Folglich bleibt auch die Gleichung (4) richtig, wenn wir h durch q und $\varkappa$ durch l ersetzen. Wir erhalten

$$(7) \qquad q = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \cdots.$$

Um eine obere Grenze für den absoluten Betrag der Größe l zu bestimmen, erinnern wir zunächst daran, daß der Arkus der Größe k'^2 vom Vorzeichen abgesehen gleich dem Winkel β_1 im Dreieck $e_1 e_2 e_3$ ist, dessen Scheitel der Punkt e_1 ist (vgl. § 36). Weil nach Voraussetzung die Seite $e_2 e_3$ die kleinste Seite des Dreiecks ist (1), so ist

$$(8) \qquad 2\,|e_1 - e_2|\cos\beta_1 \geqq |e_1 - e_3| \qquad \beta_1 < \frac{\pi}{3}.$$

Wir setzen

$$(9) \qquad \left|\sqrt[4]{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}}\right| = \varrho \qquad \frac{\beta_1}{4} = \psi$$

und erhalten, weil der reelle Teil der Wurzel $\sqrt{k'}$ positiv ist,

$$\sqrt{k'} = \varrho\, e^{\pm \psi i}.$$

Für ϱ und ψ gelten die Ungleichungen (8)

$$(10) \qquad \varrho \leqq 1 \qquad \psi \leqq \frac{\pi}{12} \qquad 2\varrho^4 \cos 4\psi \geqq 1.$$

Für das Quadrat des absoluten Betrages der Größe l (6) erhalten wir den Ausdruck

$$(11) \qquad |l^2| = m = \frac{1 - 2\varrho\cos\psi + \varrho^2}{1 + 2\varrho\cos\psi + \varrho^2}.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{\partial m}{\partial \varrho} = -4\cos\psi\,\frac{1 - \varrho^2}{(1 + 2\varrho\cos\psi + \varrho^2)^2}$$

ergibt sich, daß m abnimmt, wenn ϱ bei konstantem ψ wächst. Das Maximum von m, das einem gegebenen Wert von ψ entspricht, tritt demnach ein, wenn

$$(12) \qquad 2\varrho^4 \cos 4\psi = 1 \qquad (10)$$

ist. Aus dieser Gleichung folgt

$$\frac{d\varrho}{d\psi} = \varrho \operatorname{tg} 4\psi.$$

Es ist daher (11)

$$\frac{dm}{d\psi} = \frac{\partial m}{\partial \varrho}\frac{d\varrho}{d\psi} + \frac{\partial m}{\partial \psi} = 4\varrho\,\frac{\varrho^2 \sin 5\psi - \sin 3\psi}{(1 + 2\varrho\cos\psi + \varrho^2)^2 \cos 4\psi}.$$

Der Zähler $\varrho^2 \sin 5\psi - \sin 3\psi$ ist für alle in Betracht kommenden Wert von ψ (10) positiv oder wenigstens nicht negativ. Um dies zu beweisen, multiplizieren wir ihn mit der positiven Größe $\varrho^2 \sin 5\psi + \sin 3\psi$.

Das Produkt hat den Wert (12)

$$\varrho^4 \sin^2 5\psi - \sin^2 3\psi = \frac{\sin^2 5\psi - 2\sin^2 3\psi \cos 4\psi}{2\cos 4\psi}$$

$$= \frac{1 + \cos 2\psi - 2\cos 4\psi}{4\cos 4\psi}$$

ist also positiv.

Hieraus folgt, daß die Größe m mit ψ wächst; das Maximum von m tritt also ein, wenn ψ den größten zulässigen Wert (10) $\frac{\pi}{12}$ besitzt. In diesem Fall ist das Dreieck der Verzweigungspunkte gleichseitig (12).

Wir erhalten

$$k'^2 = e^{\pm\frac{\pi i}{3}} \quad l = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \mp i \operatorname{tg}\frac{\pi}{24}.$$

Folglich ist der absolute Betrag

$$|l| \leqq \operatorname{tg}\frac{\pi}{24} < \frac{2}{15}$$

und der absolute Betrag des zweiten Gliedes der Reihe (7) ist $< \frac{1}{4 \cdot 10^5}$. Wenn k' reell und positiv ist, so tritt das Maximum von l für $k'^2 = \frac{1}{2}$ ein, es ist also

$$l \leqq \frac{\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} + 1} < \frac{2}{23}.$$

Man kann deshalb bei den meisten Anwendungen sich auf das erste Glied der Reihe (7) beschränken.

Nachdem die Größe q bestimmt ist, ergibt sich die Jacobische Halbperiode K aus der Gleichung (1) des § 65

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots.$$

Die zweite Halbperiode iK' ist durch die Gleichung

$$K' = -\frac{K}{\pi}\log q$$

bestimmt. Welchen seiner Werte wir dem Logarithmus beilegen, ist an sich gleichgültig, denn wenn wir ihn um $n \cdot 2\pi i$ vermehren, so tritt an Stelle der Periode $2iK'$ die äquivalente Periode $2iK' + n \cdot 4K$. Es ist zweckmäßig über die Zahl n so zu verfügen, daß der absolute Betrag der Periode möglichst klein wird.

Sechster Abschnitt.

Anwendungen der elliptischen Funktionen.

§ 70. Rektifikation der Lemniskate, Ellipse und Hyperbel.

Die Lemniskate.

Die Gleichung der Lemniskate lautet, wenn wir ihre Symmetrieachsen als Koordinatenachsen wählen:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Führen wir an Stelle der kartesischen Koordinaten Polarkoordinaten ein, so erhält die Gleichung die Form

$$r^2 = a^2 \cos 2\psi.$$

Das Quadrat des Bogenelements ist

$$ds^2 = r^2 d\psi^2 + dr^2 = \frac{a^4 dr^2}{a^4 - r^4}.$$

Folglich ist die Länge des vom Scheitel an gezählten Bogens

$$s = \int_r^a \frac{a^2 dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}. \tag{1}$$

Die Bogenlänge wird also durch ein elliptisches Integral erster Gattung ausgedrückt.

Um das Integral in die Legendresche Normalform zu transformieren, benützen wir die Formeln (16) und (17) des § 12. Wir haben im vorliegenden Fall

$$\alpha_1 = -a, \quad \alpha_2 = ai, \quad \alpha_3 = -ai, \quad \alpha_4 = a$$

zu setzen. Es ist folglich

$$\varkappa = -i, \quad k = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt[4]{-AB} = \sqrt{2} \cdot a$$

und wir erhalten

$$\operatorname{tg}^2\psi = \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2} = \frac{\frac{1}{2}\sin^2\varphi}{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}$$

(2) $$s = \int_r^a \frac{a^2 dr}{\sqrt{a^4 - r^4}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Die Ellipse.

Aus der Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

folgt

$$ds^2 = \frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}\,dx^2.$$

Wir setzen

$$\frac{x}{a} = z, \quad \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = k$$

und erhalten für den vom Endpunkt der kleinen Achse an gezählten Bogen den Ausdruck

(3) $$s = a\int_0^z \frac{1 - k^2 z^2}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}\,dz.$$

Die Bogenlänge wird also durch ein elliptisches Integral zweiter Gattung ausgedrückt. Wir führen das Jacobische Integral erster Gattung

$$v = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

ein und erhalten

$$z = \operatorname{sn} v \quad \sqrt{1 - k^2 z^2} = \operatorname{dn} v \quad dz = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v\,dv$$

$$s = a\int_0^v \operatorname{dn}^2 v\,dv = a\left[v - k^2\int_0^v \operatorname{sn}^2 v\,dv\right].$$

Folglich ist (§ 66 Nr. 6)

(4) $$s = a\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} + a\left[1 - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}\right]v.$$

Die Hyperbel.

Aus der Gleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

folgt

$$ds^2 = \frac{(a^2 + b^2)\,y^2 + b^4}{b^2\,(y^2 + b^2)}\,dy^2.$$

Der vom Scheitel an gezählte Bogen ist also

$$(5) \qquad s = \frac{1}{b}\int\limits_0^y \frac{(a^2 + b^2)\,y^2 + b^4}{\sqrt{(y^2 + b^2)\,((a^2 + b^2)\,y^2 + b^4)}}\,dy.$$

Er wird demnach ebenfalls durch ein elliptisches Integral zweiter Gattung ausgedrückt.

Wir benutzen die Formeln (16) und (17) des § 12, um das Differential erster Gattung

$$(6) \qquad dU = \frac{dy}{\sqrt{(y^2 + b^2)\,((a^2 + b^2)\,y^2 + b^4)}}$$

in die Legendresche Normalform zu transformieren. Wir haben in den genannten Formeln zu substituieren:

$$\alpha_0 = a^2 + b^2 \quad \alpha_1 = -\alpha_4 = bi \quad \alpha_2 = -\alpha_3 = \frac{b^2 i}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

oder

$$\alpha_1 = -\alpha_4 = \frac{b^2 i}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \alpha_2 = -\alpha_3 = bi.$$

Wir wollen die Rechnung nur für die erste Substitution durchführen.

Es ergibt sich:

$$(7) \qquad \varkappa = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad k = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \frac{1 + \varkappa}{\sqrt{B}} = \frac{1}{b\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$b^2\,\frac{y^2 + b^2}{(a^2 + b^2)\,y^2 + b^4} = 1 - k^2 \sin^2\varphi$$

und hieraus

$$(8) \qquad \frac{b^4}{(a^2 + b^2)\,y^2 + b^4} = \cos^2\varphi.$$

Aus der Gleichung (17) des § 12 folgt mit Rücksicht auf (6) und (7)

$$(9) \qquad dU = \frac{1}{b\sqrt{a^2 + b^2}}\;\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \frac{dv}{b\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Aus (8) und (9) folgt

$$(a^2 + b^2) y^2 + b^4 = \frac{b^4}{\cos^2 \varphi} = \frac{b^4}{\operatorname{cn}^2 v}.$$

Aus dieser Gleichung und den Gleichungen (5) und (6) folgt sodann

$$(10) \quad s = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int_0^v \frac{dv}{\operatorname{cn}^2 v}.$$

Nun ist (§ 66 Nr. 16)

$$(11) \qquad \frac{1}{\operatorname{cn} v} = \frac{ik}{k'} \operatorname{cn}(v + K + iK')$$

und (§ 66 Nr. 5)

$$k^2 \operatorname{cn}^2 v = k^2 - k^2 \operatorname{sn}^2 v = k^2 - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} + \frac{d^2 \log \Theta(v)}{dv^2}.$$

Folglich ist

$$k^2 \operatorname{cn}^2 (v + K + iK') = \frac{d^2 \log \Theta(v + K + iK')}{dv^2} + k^2 - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}$$

$$= \frac{d^2 \log H_1(v)}{dv^2} + k^2 - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}. \qquad (\text{§ 55 Nr. 18})$$

Aus (10) folgt nun mit Rücksicht auf (7) und (11)

$$s = -\sqrt{a^2 + b^2} \cdot k'^2 \int_0^v \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn}^2 (v + K + iK')\, dv$$

$$= -\sqrt{a^2 + b^2} \int_0^v \left[\frac{d^2 \log H_1(v)}{dv^2} + k^2 - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}\right]$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \left[\left(\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - k^2\right) v - \frac{H_1'(v)}{H_1(v)}\right].$$

Ebene Kurven dritter Ordnung.

§ 71. Normalform der Gleichung. Jede ebene Kurve dritter Ordnung kann in eine Kurve projiziert werden, deren Gleichung die Form

$$(1) \qquad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

besitzt, wo x, y kartesische Koordinaten bedeuten.

Soweit es sich um die Untersuchung der projektivischen Eigenschaften der Kurven dritter Ordnung handelt, kann man daher die Gleichungsform (1) zu Grunde legen.

Der eben ausgesprochene Satz geht auf Newton zurück; wir werden weiter unten (§ 74) einen Beweis desselben geben.

Wenn von den drei Größen e_ν zwei einander gleich sind, so ist der Punkt auf der x-Achse, dessen Abszisse gleich der Doppelwurzel ist, ein Doppelpunkt der Kurve, und umgekehrt ist leicht zu zeigen, daß ein Doppelpunkt nur dann auftreten kann, wenn zwei von den Größen e_ν denselben Wert haben. Diesen Fall schließen wir im folgenden aus: wir setzen voraus, daß die Diskriminante

$$\frac{1}{16}G = \frac{1}{16}\left(g_2^3 - 27\,g_3^2\right) = (e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2(e_1 - e_2)^2$$

von Null verschieden ist.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung reeller Kurven und setzen demnach die Koeffizienten g_2, g_3 als reell voraus. Wenn die Diskriminante G positiv ist, so sind die drei Größen e_ν reell, in diesem Fall besteht die Kurve aus einem Oval und

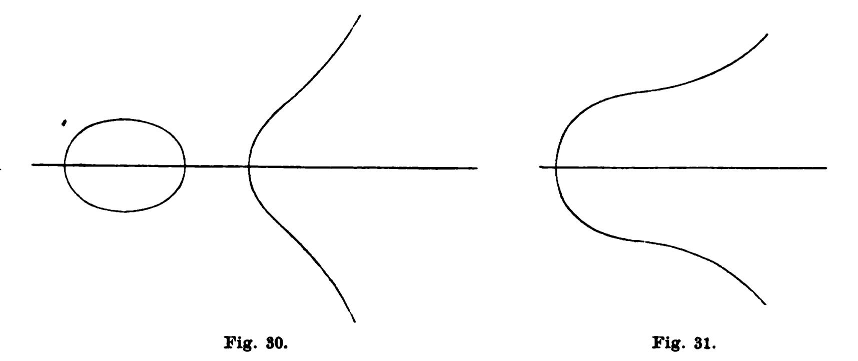


Fig. 30. Fig. 31.

einem unendlichen Ast (Fig. 30). Wenn G negativ ist, so ist nur eine der drei Größen e_ν — es sei dies e_2 — reell, die beiden anderen, e_1 und e_3, sind konjugiert imaginär. In diesem Fall besteht die Kurve aus einem unendlichen Ast (Fig. 31). Um die Koordinaten der Punkte der Kurve als einwertige Funktionen eines Parameters darzustellen, setzen wir

$$(2) \qquad x = p(u) \qquad y = p'(u).$$

Damit die Koordinaten reell sind, muß, wenn die Diskriminante G positiv ist, entweder die Größe u oder die Differenz $u - \omega_3$ einem reellen Wert kongruent sein (§ 45).*) Wir erhalten jeden Punkt des unendlichen Astes und jeden nur einmal, wenn wir die Größe u das reelle Intervall

$$-\omega_1 < u \leqq \omega_1$$

durchlaufen lassen; setzen wir $u = \omega_3 + v$ und lassen v dasselbe Intervall durchlaufen, so durchläuft der entsprechende Kurvenpunkt einmal das Oval.

Wenn die Diskriminante G negativ ist, so muß, damit die Koordinaten reell sind, die Größe u einem reellen Wert kongruent sein (§ 45 Schluß). Wir erhalten daher alle Kurvenpunkte und jeden nur einmal, wenn wir die Größe u das reelle Intervall

$$-\omega_1 < u \leqq \omega_1$$

durchlaufen lassen.

§ 72. Schnitt der Kurve mit einer Geraden; Tangenten; Inflexionspunkte. Es sei eine beliebige Gerade gegeben

$$y = ax + b. \tag{1}$$

Die Parameterwerte, die den Schnittpunkten dieser Geraden mit unserer Kurve dritter Ordnung entsprechen, bezeichnen wir mit $u_1 u_2 u_3$. Für diese Werte verschwindet die elliptische Funktion

$$f(u) = p'(u) - ap(u) - b.$$

Diese Funktion wird für $u = 0$ zur dritten Ordnung unendlich, besitzt aber im fundamentalen Periodenparallelogramm keinen weiteren Unstetigkeitspunkt. Infolge des Abelschen Theorems besteht daher für ihre Nullpunkte die Gleichung

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0. \tag{2}$$

---

*) Wir wählen das primitive Periodenpaar $2\omega_1$, $2\omega_3$, wie dies im § 45 geschehen ist, derart, daß ω_1 reell und positiv und ω_3 positiv imaginär ist, wenn G positiv ist, und daß ω_1 und ω_3 konjugiert imaginär sind, wenn G negativ ist.

Diese Gleichung drückt die notwendige und ausreichende Bedingung dafür aus, daß die den Parameterwerten $u_1 u_2 u_3$ entsprechenden Kurvenpunkte auf einer Geraden liegen.

Wenn zwei von diesen Werten zueinander kongruent sind, so fallen zwei Schnittpunkte zusammen: die Gerade berührt die Kurve. Sind alle drei kongruent, so fallen alle drei Schnittpunkte zusammen; der entsprechende Punkt der Kurve ist ein Inflexionspunkt, die Gerade eine Inflexionstangente.

Damit dem Parameterwert u ein Inflexionspunkt entspricht, muß also

$$3u \equiv 0$$

sein. Dieser Kongruenz genügen die folgenden neun inkongruenten Werte:

$$(3) \qquad 0 \quad \pm \frac{2\omega_1}{3} \quad \pm \frac{2\omega_3}{3} \quad \pm \frac{2\omega_1}{3} \pm \frac{2\omega_3}{3}.$$

Der Inflexionspunkt, der dem Wert $u = 0$ entspricht, ist der unendlich ferne Punkt der y-Achse; die zugehörige Tangente ist die unendlich ferne Gerade.

Jede Gerade, die zwei Inflexionspunkte verbindet, geht durch einen dritten Inflexionspunkt; es folgt das unmittelbar aus der Gleichung (2).

Denken wir uns die Inflexionspunkte numeriert. Die Verbindungslinie der Punkte 1, 2 enthält einen weiteren Inflexionspunkt, es sei dies der Punkt 3. Von den Geraden 1, 4; 2, 4; 3, 4 enthält jede einen weiteren Inflexionspunkt, es seien dies die Punkte 7, 8, 9. Die Verbindungslinie 4, 5 enthält einen weiteren Inflexionspunkt und das kann nur der Punkt 6 sein, denn die Geraden 4, 1; 4, 2; 4, 3 gehen durch die Punkte 7, 8, 9. Die Verbindungslinie 7, 8 kann durch keinen der Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 gehen, sie geht also durch den Punkt 9.

Die neun Inflexionspunkte liegen also zu dreien auf drei Geraden. Die Verteilung ist vollständig bestimmt, wenn die beiden Punkte 1, 2 gewählt sind, diese aber können willkürlich aus den neun Inflexionspunkten herausgegriffen werden. Durch jeden Inflexionspunkt gehen somit vier Gerade, auf denen zwei weitere Inflexionspunkte liegen. Es gibt demnach

vier Dreiecke, auf deren Seiten die neun Inflexionspunkte liegen.

Von den neun Inflexionspunkten sind nur drei reell.

Wenn die Diskriminante G positiv ist, entsprechen ihnen die Werte $u = 0$ und $u = \pm \frac{2\omega_1}{3}$; wenn G negativ ist, entsprechen ihnen die Werte $u = 0$ und $u = \pm \frac{2\omega_1 + 2\omega_3}{3}$.

Von den vier eben besprochenen Dreiecken ist nur **eines** reell; jede Seite desselben geht durch einen reellen und zwei konjugiert imaginäre Inflexionspunkte.

Wir wollen nun noch zusehen, wie viel Tangenten von einem gegebenen Punkt der Kurve aus an dieselbe gezogen werden können. Von der Tangente, die in dem gegebenen Punkt berührt, sehen wir dabei ab.

Es sei v der Parameterwert, der dem gegebenen Punkt entspricht und u ein Wert, der dem Berührungspunkt einer Tangente durch den gegebenen Punkt entspricht. Wegen (2) ist

$$v + 2u \equiv 0.$$

Wir erhalten demnach für u die vier inkongruenten Werte

$$(4) \qquad -\frac{v}{2} \qquad -\frac{v}{2} + \omega_1 \qquad -\frac{v}{2} + \omega_3 \qquad -\frac{v}{2} + \omega_1 + \omega_3.$$

Um die Realitätsverhältnisse zu untersuchen, nehmen wir zunächst an, die Diskriminante G sei positiv. Wenn der gegebene Punkt dem unendlichen Ast der Kurve angehört, so ist v reell (vgl. den vorigen Paragraphen). Von den vier Werten (4) sind daher zwei reell, nämlich die Werte $-\frac{v}{2}$ und $-\frac{v}{2} + \omega_1$. Diesen Werten entsprechen Punkte des unendlichen Astes. Die beiden anderen von den Werten (4) haben die Form $\omega_3 +$ reelle Größe. Diesen Werten entsprechen Punkte des Ovals.

Wenn der gegebene Punkt dem Oval angehört, so ist die Differenz $v - \omega_3$ eine reelle Größe. Die vier Werte (4) haben daher alle die Form $\pm \frac{\omega_3}{2} +$ reelle Größe; keinem dieser Werte entspricht ein reeller Punkt der Kurve.

Von einem Punkte des unendlichen Astes aus gehen somit vier reelle Tangenten der Kurve aus; zwei

berühren den unendlich fernen Ast, zwei das Oval. Von einem Punkt des Ovals aus kann man keine Tangente an die Kurve ziehen.

In beiden Fällen ist die Tangente, die die Kurve im gegebenen Punkt berührt, nicht mitgezählt.

Nehmen wir nunmehr an, die Diskriminante G sei negativ. In diesem Fall entspricht dem gegebenen Punkt ein reeller Parameterwert v und es gibt zwei reelle Berührungspunkte. Sie entsprechen den Werten $-\frac{v}{2}$ und $-\frac{v}{2}+\omega_1+\omega_3$.

Man kann demnach, wenn die Kurve nur aus einem unendlichen Ast besteht, von jedem Kurvenpunkt aus zwei reelle Tangenten an die Kurve ziehen.

Wenn der gegebene Punkt ein Inflexionspunkt der Kurve ist, so fällt eine der von ihm ausgehenden Tangenten mit der Inflexionstangente zusammen.

§ 73. Schnitt der Kurve mit einer algebraischen Kurve. Es sei

$$F(x/y) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung einer beliebigen algebraischen Kurve der Ordnung n. Der Kürze wegen schließen wir den Fall aus, daß das Polynom $F(x/y)$ kein in y^n multipliziertes Glied enthält. Substituieren wir die Werte

$$x = p(u) \qquad y = p'(u),$$

so geht das Polynom $F(x/y)$ in eine elliptische Funktion $f(u)$ über. Diese Funktion wird im fundamentalen Periodenparallelogramm nur für $u = 0$ unendlich und zwar zur Ordnung $3n$. Sie verschwindet demnach für $3n$ inkongruente Werte $u_1 u_2 \ldots u_{3n}$ und diese Werte genügen auf Grund des Abelschen Theorems der Kongruenz

$$\sum_{\nu=1}^{3n} u_\nu \equiv 0. \tag{2}$$

Von den $3n$ Schnittpunkten unserer Kurve dritter Ordnung mit der Kurve (1) ist daher einer durch die übrigen bestimmt.

Daraus folgt: haben zwei verschiedene Kurven n-ter Ordnung mit der gegebenen Kurve dritter Ordnung $3n-1$ Schnittpunkte gemein, so haben sie auch den letzten Schnittpunkt gemein. Liegen also zum Beispiel von den neun Schnittpunkten zweier Kurven dritter Ordnung sechs auf zwei Geraden, so liegen auch die letzten drei auf einer Geraden.

Wenn von den $3n$ Werten u_ν eine Anzahl zusammenfallen, so berührt die Kurve (1) die gegebene Kurve dritter Ordnung. Sollen alle $3n$ Schnittpunkte zusammenfallen, also eine $3n$-punktige Berührung eintreten, so muß der Parameter u des Berührungspunktes der Kongruenz

$$3nu \equiv 0$$

genügen. Es gibt $9n^2$ inkongruente Werte, für die sie erfüllt ist:

$$u = \frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{3n}, \quad \lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots, 3n-1.$$

Zu diesen gehören auf jeden Fall die Werte, die den Inflexionspunkten entsprechen. Die Kurven, die in diesen Punkten $3n$-punktig berühren, sind die n-fach gezählten Inflexionstangenten.

§ 74. Transformation der allgemeinen Kurvengleichung in die Normalform. Wir haben bisher unserer Untersuchung eine Normalform der Kurvengleichung zu Grunde gelegt, wir wollen nun von der allgemeinen Gleichung

$$(1) \qquad F(x/y) = \sum A_{\lambda\mu\nu} x^\lambda y^\mu = 0 \qquad \begin{matrix} \lambda+\mu+\nu=3 \\ \lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \end{matrix}$$

ausgehen.

Bekanntlich sind die Inflexionspunkte der Kurve (1) ihre Schnittpunkte mit einer zweiten Kurve dritter Ordnung, der Hesseschen Kurve. Imaginäre Inflexionspunkte können demnach, da wir die Koeffizienten der Gleichung (1) als reell voraussetzen, nur paarweise auftreten. Es muß daher mindestens ein reeller Inflexionspunkt existieren. Die Gleichung der zugehörigen Inflexionstangente sei

$$(2) \qquad Z = c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$$

und es sei

$$(3) \qquad X = a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$$

die Gleichung einer zweiten durch den Inflexionspunkt gehenden Geraden. Drücken wir die Größen x, y durch die Größen X, Z aus, so erhalten wir eine Identität

$$F(x/y) = \Phi(X/Z). \tag{4}$$

Weil die Gerade (2) eine im Punkt $X = 0$, $Z = 0$ berührende Inflexionstangente ist, so läßt sich die ganze Funktion Φ in der Form

$$\Phi = ZQ + \text{Konst. } X^3 \tag{5}$$

darstellen, wo Q eine ganze Funktion zweiten Grades von X und Z bedeutet.

Es sei nun

$$Y = b_1 x + b_2 y + b_3 = 0 \tag{6}$$

die Gleichung der Polare des Punktes $X = 0$, $Z = 0$ in Beziehung auf den Kegelschnitt $Q = 0$. Wie aus der Theorie der Kegelschnitte bekannt ist, läßt sich die ganze Funktion Q in der Form

$$Q = P + \text{Konst. } Y^2$$

darstellen, wo P eine ganze homogene Funktion zweiten Grades von X und Z bedeutet. Substituieren wir diesen Wert in (5), so erhalten wir mit Rücksicht auf (4)

$$F(x/y) = \text{Konst. } Y^2 Z + PZ + \text{Konst. } X^3. \tag{7}$$

Wenn der Koeffizient von $Y^2 Z$ verschwindet, so zerfällt die Kurve in drei Gerade, die durch den Punkt $X = 0$, $Z = 0$ gehen. Diesen Fall schließen wir aus. Da wir bisher die Koeffizienten der Linearform Y (6) nur bis auf einen gemeinschaftlichen Faktor bestimmt haben, können wir diesen Faktor so wählen, daß der Koeffizient von $Y^2 Z$ gleich -1 wird. Bezüglich der Linearform X (3) haben wir bisher nur festgesetzt, daß die Gerade $X = 0$ durch den Berührungspunkt der Inflexionstangente $Z = 0$ gehen soll. Daran wird nichts geändert, wenn wir die Linearform X durch die Linearform

$$\alpha X + \beta Z$$

ersetzen, wo α und β beliebige Konstante bedeuten. Über

diese Konstanten können wir derart verfügen, daß die ganze homogene Binärform dritten Grades

$$PZ + \text{Konst. } X^3$$

in

$$4X^3 - g_2 XZ^2 - g_3 Z^3$$

übergeht. Die Identität (7) erhält nunmehr die Form

$$(8) \quad F(x/y) = \Phi(X/Z) = 4X^3 - g_2 XZ^2 - g_3 Z^3 - Y^2 Z.$$

Wir wenden nun, unter $\xi\eta$ kartesische Koordinaten verstehend, auf die Kurvengleichung (1) die projektive Transformation an

$$(9) \quad \xi = \frac{X}{Z}, \qquad \eta = \frac{Y}{Z}.$$

Wie sich aus (8) ergibt, geht durch diese Transformation die Gleichung (1) in die Gleichung

$$(10) \quad \eta^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3$$

über. Damit ist bewiesen:

die Gleichung einer Kurve dritter Ordnung, die nicht in drei durch einen Punkt gehende Gerade zerfällt, kann immer durch eine reelle projektive Transformation in die Normalform des § 71 übergeführt werden.

Wir können aus der vorausgehenden Betrachtung noch eine bemerkenswerte Folgerung ziehen.

Aus den Gleichungen (2), (3) und (6) ergibt sich, daß wir die Größen x und y in der Form

$$(11) \quad x = \frac{\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z}{\gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z}, \qquad y = \frac{\beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z}{\gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z}$$

darstellen können. Nun genügen wir der Kurvengleichung (vgl. (8)), wenn wir

$$\frac{X}{Z} = p(u), \quad \frac{Y}{Z} = p'(u)$$

setzen. Substituieren wir diese Werte in (11), so erhalten wir für die Koordinaten x, y die Darstellung

$$(12) \quad x = \frac{\alpha_1 p(u) + \alpha_2 p'(u) + \alpha_3}{\gamma_1 p(u) + \gamma_2 p'(u) + \gamma_3}, \qquad y = \frac{\beta_1 p(u) + \beta_2 p'(u) + \beta_3}{\gamma_1 p(u) + \gamma_2 p'(u) + \gamma_3}.$$

Zähler und Nenner der rechts stehenden Quotienten sind elliptische Funktionen dritter Ordnung, die nur unendlich werden, wenn $u \equiv 0$ ist. Die Summe der drei inkongruenten Werte von u, für die eine der in Rede stehenden elliptischen Funktionen verschwindet, ist daher ebenfalls $\equiv 0$.

Wir können die drei Funktionen in einfacher Weise durch σ-Funktionen darstellen. Nehmen wir an, der Zähler von x (12) verschwinde für die inkongruenten Werte $u_1, u_2, -(u_1 + u_2)$; der Zähler von y für die Werte $v_1, v_2, -(v_1 + v_2)$; der gemeinschaftliche Nenner für die Werte $w_1, w_2, -(w_1 + w_2)$. Wir erhalten (§ 51)

$$(13) \qquad \begin{cases} x = C_1 \dfrac{\sigma(u - u_1)\,\sigma(u - u_2)\,\sigma(u + u_1 + u_2)}{\sigma(u - w_1)\,\sigma(u - w_2)\,\sigma(u + w_1 + w_2)}, \\[2ex] y = C_2 \dfrac{\sigma(u - v_1)\,\sigma(u - v_2)\,\sigma(u + v_1 + v_2)}{\sigma(u - w_1)\,\sigma(u - w_1)\,\sigma(u + w_1 + w_2)}. \end{cases}$$

Über die beiden multiplikativen Konstanten C_1 und C_2 und die sechs Größen $u_1 u_2$, $v_1 v_2$, $w_1 w_2$ kann nach Belieben verfügt werden und ebenso stehen die beiden Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_3$ zur Verfügung (oder was dasselbe sagen will, die beiden Größen g_2 und g_3). Weil die Funktion $\sigma(u/\omega_1, \omega_3)$ in den drei Größen u, ω_1, ω_3 homogen ist, so bleiben die Gleichungen (13) im wesentlichen ungeändert, wenn wir die 8 Größen ω_1, ω_3, $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$ mit demselben Faktor m multiplizieren. An Stelle der Größen g_2, g_3 treten dann die Größen $\frac{g_2}{m^4}$ und $\frac{g_3}{m^6}$. Die Invariante

$$I = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}$$

und der Periodenquotient

$$\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$$

bleiben ungeändert. In der Darstellung (13) kommen daher, wie in der Gleichung (1), 9 wesentliche Konstante vor. Gehen wir von einer Kurve zu einer kollinear verwandten über, so ändern die 8 Konstanten $C_\nu u_\nu v_\nu w_\nu$ ihre Werte, die Invariante I bleibt ungeändert; sie ist also eine absolute Invariante der Kurve dritter Ordnung.

Es ist einleuchtend, daß wir den Betrachtungen, die wir in den vorhergehenden Paragraphen durchgeführt haben, ebenso gut die Darstellung (12) oder (13) hätten zu Grunde legen können, als die Normalform, von der wir ausgegangen sind.

Elliptische Koordinaten und ihre Anwendungen.

§ 75. Elliptische Koordinaten. Zur Lösung einer Reihe von Aufgaben, die sich auf das Ellipsoid beziehen, benutzt man zweckmäßig ein System krummliniger orthogonaler Koordinaten, die man als „elliptische Koordinaten" bezeichnet. Um zu diesem Koordinatensystem zu gelangen, betrachten wir, unter ϱ einen verfügbaren Parameter verstehend, das System der Flächen

$$\frac{x^2}{a^2-\varrho}+\frac{y^2}{b^2-\varrho}+\frac{z^2}{c^2-\varrho}=1. \tag{1}$$

Die Größen abc seien untereinander verschieden und es sei $a>b>c>0$. Die Flächen des Systems werden von derselben abwickelbaren Fläche umhüllt; sie besitzen dieselben Symmetrieebenen und eine jede Symmetrieebene schneidet die Flächen des Systems in Kegelschnitten, die dieselben Brennpunkte besitzen. Man bezeichnet deswegen das Flächensystem (1) als „Schar konfokaler Flächen". Von der zuerst genannten Eigenschaft der Flächenschar machen wir im folgenden keinen Gebrauch und gehen deshalb auch nicht auf den Beweis ein.

Durch jeden Punkt des Raumes gehen drei Flächen der Schar, denn wenn wir die Koordinaten xyz als gegeben betrachten, so genügen der Gleichung (1) drei Parameterwerte $\varrho_1\varrho_2\varrho_3$. Daß diese drei Werte reell sind, ergibt sich aus der Bemerkung, daß die Funktion der Variabeln ϱ

$$F(\varrho)=\frac{x^2}{a^2-\varrho}+\frac{y^2}{b^2-\varrho}+\frac{z^2}{c^2-\varrho}-1 \tag{2}$$

in jedem der drei Intervalle

$$-\infty,\ c^2-\varepsilon;\quad c^2+\varepsilon,\ b^2-\varepsilon;\quad b^2+\varepsilon,\ a^2-\varepsilon$$

das Vorzeichen wechselt, vorausgesetzt, daß die positive Größe ε hinreichend klein gewählt wird. In jedem dieser Intervalle liegt also eine Wurzel der Gleichung $F(\varrho)=0$. Wenn die

Koordinate $x = 0$ ist, so ist eine der Wurzeln $= a^2$ zu setzen. Die diesem Parameterwert entsprechende Fläche ist die doppelt gezählte Ebene $x = 0$. Analoges gilt, wenn die Koordinate y oder die Koordinate z verschwindet.

Die Bezeichnung der Wurzeln wählen wir so, daß

$$a^2 \geqq \varrho_1 > b^2 \geqq \varrho_2 > c^2 \geqq \varrho_3 \tag{3}$$

ist. Der Wurzel ϱ_3 entspricht ein Ellipsoid, der Wurzel ϱ_2 ein einschaliges, der Wurzel ϱ_1 ein zweischaliges Hyperboloid.

Zwei in der Schar (1) enthaltene Flächen derselben Art schneiden sich nicht. Dagegen schneiden sich je zwei Flächen verschiedener Art und zwar schneiden sie sich unter einem rechten Winkel.*)

Zum Beweis setzen wir in der Gleichung (1) erst $\varrho = \varrho_\mu$ und dann $\varrho = \varrho_\nu$ und subtrahieren die zweite Gleichung von der ersten. Nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Faktors $\varrho_\mu - \varrho_\nu$ erhalten wir

$$\frac{x^2}{(a^2 - \varrho_\mu)(a^2 - \varrho_\nu)} + \frac{y^2}{(b^2 - \varrho_\mu)(b^2 - \varrho_\nu)} + \frac{z^2}{(c^2 - \varrho_\mu)(c^2 - \varrho_\nu)} = 0. \tag{4}$$

Diese Gleichung drückt aus, daß die beiden Richtungen, deren Richtungskosinuse zu den Größen

$$\frac{x}{a^2 - \varrho_\mu} \quad \frac{y}{b^2 - \varrho_\mu} \quad \frac{z}{c^2 - \varrho_\mu}$$

beziehungsweise zu den Größen

$$\frac{x}{a^2 - \varrho_\nu} \quad \frac{y}{b^2 - \varrho_\nu} \quad \frac{z}{c^2 - \varrho_\nu}$$

proportional sind, aufeinander senkrecht stehen. Diese Richtungen sind aber die Richtungen der Normalen an die Flächen, die den Parameterwerten ϱ_μ und ϱ_ν entsprechen.

Weil sich in jedem Punkt des Raumes drei Flächen der Schar (1) schneiden, können wir einen Punkt durch die Parameter der drei Flächen, die durch ihn gehen, festlegen. Diese Parameter bezeichnen wir als „elliptische Koordinaten" des Punktes.

*) Die Schnittkurven sind bekanntlich die Krümmungslinien der Flächen.

Um die kartesischen Koordinaten xyz durch die elliptischen $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$ auszudrücken, benutzen wir die Identität

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2-\varrho} + \frac{y^2}{b^2-\varrho} + \frac{z^2}{c^2-\varrho} - 1 = -\frac{(\varrho-\varrho_1)(\varrho-\varrho_2)(\varrho-\varrho_3)}{(\varrho-a^2)(\varrho-b^2)(\varrho-c^2)}.$$

Aus derselben folgt

$$(6) \quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{(a^2-\varrho_1)(a^2-\varrho_2)(a^2-\varrho_3)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \\ y^2 = \dfrac{(b^2-\varrho_1)(b^2-\varrho_2)(b^2-\varrho_3)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)} \\ z^2 = \dfrac{(c^2-\varrho_1)(c^2-\varrho_2)(c^2-\varrho_3)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen sind die Quadrate der kartesischen Koordinaten als eindeutige Funktionen der Parameter ϱ_ν bestimmt; auf die Frage, wie die Koordinaten selbst eindeutig zu definieren sind, werden wir weiter unten zurückkommen.

Durch logarithmische Differentiation der Gleichungen (6) ergibt sich

$$dx = \tfrac{1}{2} x \sum_\nu \frac{d\varrho_\nu}{\varrho_\nu - a^2}$$

$$dy = \tfrac{1}{2} y \sum_\nu \frac{d\varrho_\nu}{\varrho_\nu - b^2}$$

$$dz = \tfrac{1}{2} z \sum_\nu \frac{d\varrho_\nu}{\varrho_\nu - c^2}.$$

Wir quadrieren diese Gleichungen und addieren sie. Mit Rücksicht auf (4) erhalten wir für das Quadrat des Linienelements den Ausdruck

$$(7) \quad ds^2 = \sum_\nu P_\nu^2 d\varrho_\nu^2,$$

wo zur Abkürzung

$$(8) \quad 4P_\nu^2 = \frac{x^2}{(\varrho_\nu - a^2)^2} + \frac{y^2}{(\varrho_\nu - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\varrho_\nu - c^2)^2}$$

gesetzt ist. Unter $2P_\nu$ verstehen wir die positive Quadratwurzel aus dem rechts stehenden Ausdruck.

Um aus der vorstehenden Gleichung die kartesischen Koordinaten zu eliminieren, differenzieren wir die Identität (5) nach ϱ und setzen dann $\varrho = \varrho_\nu$. Wir erhalten (8)

$$(9) \qquad 4P_\nu^2 = -\frac{(\varrho_\lambda - \varrho_\nu)(\varrho_\mu - \varrho_\nu)}{(\varrho_\nu - a^2)(\varrho_\nu - b^2)(\varrho_\nu - c^2)}.$$

Die Buchstaben λ, μ, ν bedeuten eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3. Das Bogenelement der Koordinatenlinie $\varrho_\lambda =$ Konst. $\varrho_\mu =$ Konst. ist (7) $P_\nu d\varrho_\nu$. Das Flächenelement der Koordinatenfläche $\varrho_\lambda =$ Konst. ist, weil die Koordinatenlinien aufeinander senkrecht stehen, $P_\mu P_\nu d\varrho_\mu d\varrho_\nu$. Das Raumelement läßt sich in der Form $P_1 P_2 P_3 d\varrho_1 d\varrho_2 d\varrho_3$ darstellen.

Die Größen P_ν haben eine einfache geometrische Bedeutung: $\frac{1}{2P_\nu}$ ist der Abstand des Anfangspunktes der Koordinaten von der Ebene, die die Fläche $\varrho_\nu =$ Konst. im Punkt xyz berührt. Es ergibt sich das leicht aus der Gleichung (8).

§ 76. Oberfläche des Ellipsoids. Wir benutzen die elliptischen Koordinaten zunächst um die Oberfläche des Ellipsoids zu bestimmen. Die Gleichung der Fläche in kartesischen Koordinaten sei

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a > b > c > 0.$$

An Stelle der kartesischen Koordinaten führen wir die elliptischen Koordinaten $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$ ein. Die dritte Koordinate hat auf dem Ellipsoid den konstanten Wert 0. Wir erhalten alle Punkte der Fläche, denen positive kartesische Koordinaten entsprechen, und jeden dieser Punkte nur einmal, wenn wir die Koordinate ϱ_1 das Intervall b^2, a^2 und die Koordinate ϱ_2 das Intervall c^2, b^2 durchlaufen lassen (vgl. Nr. 3 des vorigen Paragraphen). Die Fläche des ganzen Ellipsoids ist demnach (vgl. den Schluß des vorigen Paragraphen)

$$(2) \qquad S = 8\int_{b^2}^{a^2}\int_{c^2}^{b^2} P_1 P_2 \, d\varrho_1 d\varrho_2$$

und im vorliegenden Fall ist (Nr. 9 des vorigen Paragraphen)

$$16 P_1^2 P_2^2 = \frac{\varrho_1(\varrho_1 - \varrho_2)}{(\varrho_1 - a^2)(\varrho_1 - b^2)(\varrho_1 - c^2)} \cdot \frac{\varrho_2(\varrho_2 - \varrho_1)}{(\varrho_2 - a^2)(\varrho_2 - b^2)(\varrho_2 - c^2)}.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$f(\varrho) = \varrho(\varrho - a^2)(\varrho - b^2)(\varrho - c^2) \tag{3}$$

und erhalten

$$S = 2\int_{b^2}^{a^2}\int_{c^2}^{b^2} \frac{i(\varrho_1 - \varrho_2)\,\varrho_1\varrho_2\,d\varrho_1\,d\varrho_2}{\sqrt{f(\varrho_1)}\,\sqrt{f(\varrho_2)}}. \tag{4}$$

Der Quadratwurzel $\sqrt{f(\varrho_2)}$ ist ihr positiver Wert beizulegen, die Wurzel $\sqrt{f(\varrho_1)}$ ist positiv imaginär.

Das Integral (4) läßt sich durch die vier einfachen Integrale

$$A = \int_{b^2}^{a^2} \frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{f(\varrho)}} \qquad B = \int_{c^2}^{b^2} \frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{f(\varrho)}} \tag{5}$$

$$A' = \int_{b^2}^{a^2} \frac{\varrho^2\,d\varrho}{\sqrt{f(\varrho)}} \qquad B' = \int_{c^2}^{b^2} \frac{\varrho^2\,d\varrho}{\sqrt{f(\varrho)}} \tag{6}$$

ausdrücken. Es ist

$$S = 2i(A'B - B'A). \tag{7}$$

Um die vier Integrale (5) und (6) zu berechnen, gehen wir zur Weierstraßschen kanonischen Form über. Wir setzen (vgl. § 7)

$$e_1 = m - \frac{1}{4}b^2c^2 \qquad e_2 = m - \frac{1}{4}c^2a^2 \qquad e_3 = m - \frac{1}{4}a^2b^2 \tag{8}$$

$$m = \frac{1}{12}(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)$$

und führen eine neue Variable x mittelst der gleichbedeutenden Gleichungen ein

$$x - e_1 = \frac{1}{4}b^2c^2\frac{\varrho - a^2}{\varrho} \qquad x - e_2 = \frac{1}{4}c^2a^2\frac{\varrho - b^2}{\varrho} \tag{9}$$

$$x - e_3 = \frac{1}{4}a^2b^2\frac{\varrho - c^2}{\varrho}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\varrho = \frac{\frac{1}{4}a^2b^2c^2}{m - x} \tag{10}$$

und

$$\frac{d\varrho}{\sqrt{f(\varrho)}} = \frac{dx}{2\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}} = \frac{dx}{s}. \tag{11}$$

Nun führen wir die Weierstraßsche p-Funktion ein und setzen

$$(12)\quad x = p(u) \quad s = 2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)} = -p'(u)$$

$$\frac{d\varrho}{\sqrt{f(\varrho)}} = \frac{dx}{s} = -du.$$

Sodann bestimmen wir einen Wert w der Variabeln u, der der Gleichung

$$(13)\qquad m = p(w)$$

genügt. Weil m positiv und $> e_1$ ist (8), können wir die Größe w so wählen, daß

$$(14)\qquad \omega_1 > w > 0$$

ist (vgl. § 45). Aus dieser Annahme folgt, daß $p'(w)$ reell und negativ ist. Aus (12), (13) und (8) ergibt sich

$$(15)\qquad p'(w) = -\tfrac{1}{4}a^2b^2c^2$$

und aus (9), (13) und (15) folgt

$$(16)\qquad \varrho = -\frac{\frac{1}{4}a^2b^2c^2}{x-m} = \frac{p'(w)}{p(u)-p(w)}.$$

Wenn die Variable ϱ reelle Werte durchlaufend von c^2 bis b^2 wächst, so ist die Variable x ebenfalls reell und wächst von e_3 bis e_2; die Differenz $u-\omega_3$ ist reell und wächst von Null bis ω_1 (§ 45). Geht die Variable ϱ durch reelle Werte von b^2 bis a^2, so durchläuft x das reelle Intervall e_2e_1, die Differenz $u-\omega_1$ ist positiv imaginär, sie nimmt von ω_3 bis 0 ab.

Substituieren wir die Werte (11) und (16) in (5) und (6), so folgt

$$(17)\qquad A = \int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{p'(w)}{p(u)-p(w)}du \qquad B = -\int_{\omega_3}^{\omega_2}\frac{p'(w)}{p(u)-p(w)}du$$

$$(18)\qquad A' = \int_{\omega_1}^{\omega_2}\left[\frac{p'(w)}{p(u)-p(w)}\right]^2 du \qquad B' = -\int_{\omega_3}^{\omega_2}\left[\frac{p'(w)}{p(u)-p(w)}\right]^2 du.$$

Die Integrationswege sind gerade Linien.

Um diese Integrale zu berechnen, bemerken wir, daß

$$(19)\qquad \frac{p'(w)}{p(u)-p(w)} = \zeta(u-w) - \zeta(u+w) + 2\zeta(w)$$

ist. Es folgt dies daraus, daß die rechts stehende Funktion ebenfalls die Perioden $2\omega_1, 2\omega_3$ besitzt, und daß sie mit der links stehenden Funktion die beiden Unstetigkeitspunkte $u = \pm w$ und den doppelten Nullpunkt $u = 0$ gemein hat. Die beiden Funktionen können sich demnach nur um eine multiplikative Konstante unterscheiden. Daß diese Konstante den Wert 1 hat, erkennt man, wenn man mit $u - w$ multipliziert und dann diese Differenz gegen Null konvergieren läßt.

Aus (19) folgt durch unbestimmte Integration

$$\int \frac{p'(w)}{p(u) - p(w)}\, du = \log \frac{\sigma(u - w)}{\sigma(u + w)} + 2\zeta(w) \cdot u + \text{Konst.}$$

Wir setzen die Grenzen $u = \omega_1$ beziehungsweise $u = \omega_2$ ein und erinnern daran, daß

$$\frac{\sigma(\omega_\nu - w)}{\sigma(\omega_\nu + w)} = e^{-2\eta_\nu w} \quad \text{ist (§ 49, Nr. (6)).}$$

Wir erhalten demnach (17)

$$\begin{aligned} A &= -2\eta_2 w + 2\eta_1 w + 2(\omega_2 - \omega_1)\zeta(w) + 2n\pi i \\ &= -2\eta_3 w + 2\omega_3 \zeta(w) + 2n\pi i, \end{aligned}$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet. Um zu beweisen, daß diese Zahl $= 0$ ist, betrachten wir die Größe w als variabel. Der Punkt w der u-Ebene, der den Wert w repräsentiert, darf nicht in die Verbindungslinie der Punkte ω_1 und ω_2 oder in eine homologe Gerade rücken, weil sonst das Integral A sinnlos würde. Aber innerhalb der Flächenstreifen, in die die u-Ebene durch diese Geraden zerlegt wird, ist A eine einwertige Funktion der Variabeln w. Weil $p(w)$ eine gerade, $p'(w)$ eine ungerade Funktion ist, nimmt A in den Punkten w und $-w$ entgegengesetzte Werte an, vorausgesetzt, daß die Punkte in demselben Flächenstreifen liegen. Dies trifft für den Wert w zu, den wir durch die Gleichung (13) und die Zusatzbedingung (14) bestimmt haben. Aus dieser Bemerkung ergibt sich, daß $n = 0$ sein muß.

Wir erhalten daher

$$(20) \qquad A = 2[-\eta_3 w + \omega_3 \zeta(w)]$$

und dementsprechend (17)

$$(21) \qquad B = 2[\eta_1 w - \omega_1 \zeta(w)].$$

Um das Integral A' zu bestimmen, differenzieren wir die erste der Gleichungen (17) und die Gleichung (20) nach w. Wir erhalten einerseits

$$\frac{dA}{dw} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{p''(w)}{p(u) - p(w)}\, du + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left[\frac{p'(w)}{p(u) - p(w)}\right]^2 du$$

oder (18)

$$\frac{dA}{dw} = \frac{p''(w)}{p'(w)} A + A'$$

und andererseits

$$\frac{dA}{dw} = -2[\eta_3 + \omega_3 p(w)].$$

Der Vergleich gibt

$$A' = -\frac{p''(w)}{p'(w)} A - 2[\eta_3 + \omega_3 p(w)]. \tag{22}$$

Auf demselben Weg erhalten wir

$$B' = -\frac{p''(w)}{p'(w)} B + 2[\eta_1 + \omega_1 p(w)]. \tag{23}$$

Substituieren wir die Werte (20), (21), (22), (23) in (7) so folgt

$$S = 8i \begin{vmatrix} -\eta_3 - \omega_3 p(w) & -\eta_3 w + \omega_3 \zeta(w) \\ \eta_1 + \omega_1 p(w) & \eta_1 w - \omega_1 \zeta(w) \end{vmatrix}$$

$$= 8i \begin{vmatrix} -\eta_3 & -\omega_3 \\ \eta_1 & \omega_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & p(w) \\ w & -\zeta(w) \end{vmatrix}$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf die Legendresche Relation

$$S = 4\pi[\zeta(w) + w p(w)].$$

Das auseinandergesetzte Verfahren führt auch zur Berechnung eines Stücks der Oberfläche des Ellipsoids, das von Krümmungslinien begrenzt ist.

§ 77. Ausdruck der elliptischen Koordinaten durch elliptische Funktionen. Um die elliptischen Koordinaten $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$ durch elliptische Funktionen darzustellen, setzen wir

$$a^2 = m - e_3, \quad b^2 = m - e_2, \quad c^2 = m - e_1, \quad m = \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \tag{1}$$

und bestimmen drei Argumente u_ν durch die Gleichungen

$$(2)\quad \begin{cases} \varrho_\nu = m - p(u_\nu), \quad p'(u_\nu) = -2\sqrt{(a^2-\varrho_\nu)(b^2-\varrho_\nu)(c^2-\varrho_\nu)}, \\ u_\nu = \int\limits_{-\infty}^{\varrho_\nu} \frac{d\varrho}{2\sqrt{(a^2-\varrho)(b^2-\varrho)(c^2-\varrho)}}, \qquad \nu = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Die Integrationsvariable ist reell.

Substituieren wir die Werte (2) und (3) in die Gleichungen (6) des § 75, so folgt

$$(3)\quad \begin{cases} x^2 = \frac{(p(u_1)-e_1)(p(u_2)-e_1)(p(u_3)-e_1)}{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}, \\ y^2 = \frac{(p(u_1)-e_2)(p(u_2)-e_2)(p(u_3)-e_2)}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}, \\ z^2 = \frac{(p(u_1)-e_3)(p(u_2)-e_3)(p(u_3)-e_3)}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}. \end{cases}$$

Für das Quadrat des Linienelements erhalten wir den Ausdruck (§ 75 Nr. 7 und 9)

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_\nu P_\nu^2 d\varrho_\nu^2 \\ &= (p(u_2)-p(u_1))(p(u_3)-p(u_1))\, du_1^2 \\ &+ (p(u_3)-p(u_2))(p(u_1)-p(u_2))\, du_2^2 \\ &+ (p(u_1)-p(u_3))(p(u_2)-p(u_3))\, du_3^2. \qquad (\S\ 75\ \text{Nr. } 9) \end{aligned}$$

Folglich ist das Bogenelement der Linie $u_\lambda =$ Konst., $u_\mu =$ Konst.

$$(4)\quad \begin{aligned} dl_\nu = L_\nu du_\nu &= |P_\nu p'(u_\nu)|\, du_\nu \\ &= \sqrt{(p(u_\lambda)-p(u_\nu))(p(u_\mu)-p(u_\nu))}\cdot du_\nu. \end{aligned}$$

Wir substituieren in den Gleichungen (3)

$$\sqrt{p(u_\nu)-e_\lambda} = \left[\frac{\sigma_\lambda(u_\nu)}{\sigma(u_\nu)}\right]^2 \qquad (\S\ 54\ \text{Nr. } 9)$$

$$(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu) = \frac{e^{2\eta_\lambda \omega_\lambda}}{\sigma^4(\omega_\lambda)}. \qquad (\S\ 63\ \text{Nr. 4 bis } 9)$$

Wir können dann die Wurzeln ausziehen, wobei das Vorzeichen beliebig gewählt werden darf. Wir erhalten

$$(5)\quad \begin{cases} x = e^{-\eta_1\omega_1}\sigma^2(\omega_1)\dfrac{\sigma_1(u_1)\sigma_1(u_2)\sigma_1(u_3)}{\sigma(u_1)\sigma(u_2)\sigma(u_3)}, \\ y = e^{-\eta_2\omega_2}\sigma^2(\omega_2)\dfrac{\sigma_2(u_1)\sigma_2(u_2)\sigma_2(u_3)}{\sigma(u_1)\sigma(u_2)\sigma(u_3)}, \\ z = e^{-\eta_3\omega_3}\sigma^2(\omega_3)\dfrac{\sigma_3(u_1)\sigma_3(u_2)\sigma_3(u_3)}{\sigma(u_1)\sigma(u_2)\sigma(u_3)}. \end{cases}$$

Diese Formeln besitzen vor den Formeln (7) des § 75 den wesentlichen Vorzug, daß die Koordinaten selbst, nicht nur ihre Quadrate, einwertige Funktionen der Parameter sind.

Weil die Größen $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$ reell sind, so muß jede der Größen u_ν einer der folgenden Bedingungen genügen:

u_ν selbst oder die Differenz $u_\nu - \omega_3$ ist einer reellen Größe kongruent;

u_ν selbst oder die Differenz $u_\nu - \omega_1$ ist einer rein imaginären Größe kongruent (vgl. § 45).

Aus den Ungleichungen (3) des § 75 ergeben sich für die Funktionen $p(u_\nu)$ die Ungleichungen

$$(6)\qquad p(u_3) \geqq e_1 > p(u_2) \geqq e_2 > p(u_1) \geqq e_3.$$

Aus diesen Ungleichungen im Zusammenhalt mit der eben ausgesprochenen Bemerkung folgt (s. § 45):

die Größe u_3 ist einer reellen Größe kongruent;

die Differenz $u_2 - \omega_1$ ist einer rein imaginären Größe kongruent;

die Differenz $u_1 - \omega_3$ ist einer reellen Größe kongruent.

Weil die p-Funktion eine gerade Funktion ist, erhalten wir alle reellen positiven Werte der Quadrate $x^2 y^2 z^2$ und jedes Wertsystem nur einmal, wenn wir die Variabeln u_3 und $u_1 - \omega_3$ ein reelles Intervall von der Länge ω_1 und die Variable $\frac{u_2 - \omega_1}{i}$ ein reelles Intervall von der Länge $\frac{\omega_3}{i}$ durchlaufen lassen. Um alle reellen Werte der Koordinaten xyz selbst zu erhalten, müssen wir acht derartige Intervall-Kombinationen zusammenfügen.

Wir halten zunächst die eben genannten Intervalle für die Größen u_2 und u_3 fest und lassen die Größe $u_1 - \omega_3$ das Intervall $-2\omega_1, +2\omega_1$ durchlaufen. Die Funktionen $\frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma(u)}$ sind ungerade und genügen den Gleichungen

$$\frac{\sigma_\lambda(u+2\omega_\lambda)}{\sigma(u+2\omega_\lambda)} = -\frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma(u)}, \quad \frac{\sigma_\lambda(2\omega_\lambda-u)}{\sigma(2\omega_\lambda-u)} = \frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma(u)},$$

$$\frac{\sigma_\lambda(u+2\omega_\mu)}{\sigma(u+2\omega_\mu)} = \frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma(u)}, \quad \frac{\sigma_\lambda(2\omega_\mu-u)}{\sigma(2\omega_\mu-u)} = -\frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma(u)} \qquad (\lambda \neq \mu)$$

(vgl. § 49 Nr. 6 und § 55 Nr. 4).

Daraus folgt, daß den vier Werten u_1, $-u_1$, $2\omega_1-u_1$, $-(2\omega_1-u_1)$ die folgenden vier Zeichenkombinationen der Koordinaten xyz entsprechen:

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{r|ccc} u_1 & +x & +y & +z \\ \hline -u_1 & -x & -y & -z \\ \hline 2\omega_1-u_1 & +x & -y & -z \\ \hline -2\omega_1+u_1 & -x & +y & +z. \end{array}\right.$$

Beschränken wir die Größe u_3 nach wie vor auf ein Intervall von der Länge ω_1, lassen wir aber die Größe $\frac{u_2-\omega_1}{i}$ das reelle Intervall $0, \frac{2\omega_3}{i}$ durchlaufen. Den Werten u_2 und $2\omega_3-u_2$ entsprechen die beiden Zeichenkombinationen

$$(8) \qquad \left\{\begin{array}{r|ccc} u_2 & +x & +y & +z \\ \hline 2\omega_3-u_2 & -x & +y & -z. \end{array}\right.$$

Aus den Zeichenkombinationen (7) und (8) lassen sich alle acht Zeichenkombinationen zusammensetzen. Wir erhalten also alle Punkte des Raumes und jeden nur einmal, wenn wir festsetzen, es sei

$$-2\omega_1 \leqq u_1 - \omega_3 < 2\omega_1,$$

$$0 \leqq \frac{u_2-\omega_1}{i} \leqq \frac{2\omega_3}{i},$$

$$0 \leqq u_3 \qquad \leqq \omega_3.$$

Zufolge dieser Festsetzung werden die drei Arten von Flächen, die in unserer Schar enthalten sind, in verschiedener Weise zur Koordinatenbestimmung herangezogen. Die Punkte eines Ellipsoids, das durch die Gleichung $p(u_3) =$ Konst. charakterisiert ist, entsprechen alle demselben Parameterwert u_3. Dagegen entsprechen die Punkte des einschaligen Hyperboloids, für das $p(u_2) =$ Konst. ist, teils dem Parameterwert u_2, teils

dem Parameterwert $2\omega_3 - u_2$ und die Punkte des zweischaligen Hyperboloids verteilen sich auf vier verschiedene Parameterwerte.

Daß die drei Arten von Flächen verschiedene Rollen spielen, liegt in der Natur der Sache, aber es ist einleuchtend, daß sie durch Abänderung unserer Festsetzungen die Rollen vertauschen können.

§ 78. Verteilung der Elektrizität auf einem Ellipsoid.*) Wie in der Potentialtheorie bewiesen wird, ist das elektrostatische Potential eindeutig durch die folgenden Bedingungen bestimmt:

I. Im Innern und auf der Oberfläche des Leiters ist das Potential V konstant. Im äußeren Raum und auf der Grenzfläche sind die Funktion V und ihre partiellen Derivierten erster Ordnung einwertig und überall stetig.

II. Die Funktion V genügt im äußeren Raum der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

III. Wenn der Radiusvektor $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ über alle Grenzen wächst, so bleiben die Produkte

$$rV \quad \text{und} \quad r^2 R = r^2 \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}$$

endlich.

Die Komponenten der Kraft, die die auf dem Leiter befindliche Elektrizitätsmenge auf die im Punkt xyz konzentrierte Mengeneinheit positiver Elektrizität ausübt, sind

$$-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Die Komponente der Kraft, die in die Richtung des Linienelements ds fällt, ist daher

$$-\frac{\partial V}{\partial s}.$$

Die Dichtigkeit der Elektrizität in einem Punkt der Leiteroberfläche ist

*) Vgl. H. Weber, partielle Differentialgleichungen Bd. 1, § 127.

$$h = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n},$$

wo ∂n ein Element der nach außen gerichteten Flächennormale bezeichnet. Von diesen Sätzen ausgehend, wollen wir das Potential für einen Leiter bestimmen, dessen Oberfläche die Gestalt eines Ellipsoids hat.

Die Gleichung des gegebenen Ellipsoids sei

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Führen wir elliptische Koordinaten ein, so wird ein jedes zu dem Ellipsoid (1) konfokale Ellipsoid durch einen konstanten Wert des Parameters u_3 charakterisiert (s. den Schluß des vorigen Paragraphen), und zwar ist dieser Wert reell, positiv und $< \omega_1$. Insbesondere entspricht dem Ellipsoid (1) ein Parameterwert, der der Gleichung

$$(2) \qquad p(w) = m = \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

(Nr. 2 des vorigen Paragraphen)

genügt.

Die Größen

$$\varrho_1 = m - p(u_1) \quad \text{und} \quad \varrho_2 = m - p(u_2)$$

bleiben endlich, wenn der Radiusvektor r über alle Grenzen wächst (§ 75 Nr. 3), dagegen wächst

$$\varrho_3 = m - p(u_3)$$

mit r über alle Grenzen, derart, daß

$$\lim_{\varrho_3 = \infty} \frac{r^2}{\varrho_3} = -1$$

ist (§ 75 Nr. 1). Folglich konvergiert u_3, wenn r unbegrenzt wächst, gegen Null, und es ist

$$(3) \qquad \lim_{u_3 = 0} r u_3 = 1.$$

Die Bedingung I. können wir nunmehr einfacher ausdrücken:

(4) Für $u_3 = w$ ist V konstant — wir wollen annehmen, es sei $V = 1$ —, für $u_3 \leqq w$ sind die Funktion V und ihre partiellen Derivierten erster Ordnung einwertig und stetig.

Aus III folgt mit Rücksicht auf (3):

(5) Die Quotienten $\frac{V}{u_3}$ und $\frac{R}{u_3^2}$ bleiben endlich, wenn u_3 gegen Null konvergiert.

Es erübrigt, die partielle Differentialgleichung II in elliptische Koordinaten zu transformieren. Zu dem Zweck erinnern wir an einen bekannten Satz der analytischen Geometrie:

wenn das Gleichungspolynom einer Fläche zweiten Grades

$$F = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + \cdots + a_{44}$$

durch eine orthogonale Substitution in das Polynom

$$F' = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + \cdots + a'_{44}$$

transformiert wird, so besteht die Beziehung

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = a'_{11} + a'_{22} + a'_{33}.$$

An Stelle des Polynoms F lassen wir nun das zweite Differential d^2V treten und drücken es das eine Mal durch die Linienelemente $dx\,dy\,dz$, das andere Mal durch die drei Linienelemente $dl_\nu = L_\nu du_\nu$ (§ 77 Nr. 4) aus. Wir erhalten

$$\begin{aligned} d^2V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \cdots \\ &= \frac{1}{L_1^2}\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2}dl_1^2 + \frac{1}{L_2^2}\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2}dl_2^2 + \frac{1}{L_3^2}\frac{\partial^2 V}{\partial u_3^2}dl_3^2 + \\ &\qquad + \frac{2}{L_1 L_2}\frac{\partial^2 V}{\partial u_1\,\partial u_2}dl_1\,dl_2 + \cdots. \end{aligned}$$

Sowohl die Linienelemente $dx\,dy\,dz$ als auch die Linienelemente $dl_1\,dl_2\,dl_3$ bilden ein System rechtwinkliger Koordinaten, folglich besteht die Identität

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{L_1^2}\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2} + \frac{1}{L_2^2}\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2} + \frac{1}{L_3^2}\frac{\partial^2 V}{\partial u_3^2}.$$

Demnach lautet die partielle Differentialgleichung II in elliptischen Koordinaten ausgedrückt

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\left[p(u_2) - p(u_3)\right]\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2} + \left[p(u_3) - p(u_1)\right]\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2} \\ &\qquad + \left[p(u_1) - p(u_2)\right]\frac{\partial^2 V}{\partial u_3^2} = 0. \end{aligned}$$

Wir genügen dieser Differentialgleichung, den Bedingungen (4) und der ersten der Bedingungen (5), indem wir

$$(7) \qquad V = \frac{u_3}{w}$$

setzen. Unter dieser Annahme sind die Komponenten der elektrischen Kraft, die in die Richtung der Linie $u_1 =$ Konst. $u_3 =$ Konst. und $u_2 =$ Konst. $u_3 =$ Konst. fallen, $= 0$. Die in einem Punkt des elektrischen Feldes wirkende Kraft ist also normal zu dem in der Schar konfokaler Flächen enthaltenen Ellipsoid, das durch den Punkt geht. Die Komponente der Kraft nach der Richtung der wachsenden u_3 ist

$$-\frac{\partial V}{\partial l_3} = -\frac{1}{L_3}\frac{\partial V}{\partial u_3} = -\frac{1}{w}\frac{1}{\sqrt{[p(u_3)-p(u_1)][p(u_3)-p(u_2)]}}.$$

Der absolute Betrag dieser Größe gibt die Größe der wirkenden Kraft R. Dieser Wert R genügt offenbar der Bedingung (5).

Die Funktion (7) genügt somit den Bedingungen I bis III, sie stellt daher das Potential dar.

Die Richtung der von einem Punkt des Ellipsoids (1) nach außen gehenden Flächennormale ist der Richtung der wachsenden u_3 entgegengesetzt.

Folglich ist die Dichtigkeit der Elektrizität in einem Punkt desselben (vgl. (2))

$$(8) \quad h = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{1}{4\pi w}\frac{1}{L_3} = \frac{1}{4\pi w}\frac{1}{\sqrt{[m-p(u_1)][m-p(u_2)]}}.$$

Man kann die Verteilung der Elektrizität auf dem Ellipsoid sehr anschaulich machen. Auf dem Ellipsoid (1) ist $\varrho_3 = 0$ also

$$p'(u_3) = -2\sqrt{(a^2-\varrho_3)(b^2-\varrho_3)(c^2-\varrho_3)} = -2abc$$

(§ 77, Nr. 3).

Folglich (§ 77, Nr. 4)

$$L_3 = P_3\,|p'(u_3)| = 2abc\,P_3$$

also (8)

$$(9) \qquad h = \frac{1}{4\pi w \cdot abc}\cdot\frac{1}{2P_3}.$$

Wie am Schluß des § 75 bemerkt wurde, ist der Abstand des Mittelpunktes der Fläche (1) von der Tangentialebene in dem

Punkt, dem die Dichtigkeit h entspricht, $= \frac{1}{2P_s}$ oder anders ausgedrückt: $\frac{1}{2P_s}$ ist das Produkt aus dem Radiusvektor, der nach diesem Punkt geht, und dem Kosinus des Winkels, den der Radiusvektor mit der Flächennormale bildet. Wir denken uns nun in jedem Punkt des Ellipsoids nach außen hin die Normale errichtet und tragen auf ihr ein Stück

$$\frac{\varepsilon}{2P_s} = \varepsilon r \cos(n, r)$$

ab. Den konstanten Proportionalitätsfaktor ε nehmen wir unendlich klein an. Der Radiusvektor des Endpunktes des abgeschnittenen Normalenstückes ist (siehe die nebenstehende Figur)

$$r + \delta r = r + \frac{\varepsilon r \cos(n, r)}{\cos(n, r)} = r(1 + \varepsilon).$$

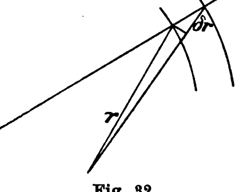


Fig. 32.

Dieser Endpunkt liegt also auf einem ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoid. Die Dichtigkeit in einem Punkt des Ellipsoids (1) ist demnach zu dem Abschnitt proportional, den ein ähnliches und ähnlich gelegenes unendlich benachbartes Ellipsoid auf der Flächennormale bestimmt.

Nach einem bekannten Satz der Potentialtheorie läßt sich der Wert des Potentials V im Punkt P in der Form

$$V = \int \frac{h \partial S}{D} \tag{10}$$

darstellen; hier bedeutet ∂S ein Element der Leiteroberfläche, D seinen Abstand vom Punkt P. Das Integral ist über die Oberfläche des Leiters zu erstrecken.

Das Integral

$$\int \frac{\varepsilon h \, \partial S}{D}$$

stellt aber auch das Potential einer unendlich dünnen mit homogener Masse von der Dichtigkeit 1 gefüllten Schale dar, die an der Stelle des Elementes ∂S die Dicke εh besitzt. Insbesondere stellt das Integral

(11) $$\int \frac{\varepsilon \partial S}{2 P_3 D}$$

das Potential einer unendlich dünnen, homogenen Schale dar, die von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden begrenzt wird. Die innere Grenzfläche besitzt die Halbachsen abc, die äußere die Halbachsen $a(1+\varepsilon)$, $b(1+\varepsilon)$, $c(1+\varepsilon)$. Aus den Gleichungen (7) bis (10) ergibt sich für das Potential der Schale in einem äußeren Punkt der Wert (vgl. auch (3))

$$4\pi\, abc\, \varepsilon u_3;$$

$4\pi\, abc\, \varepsilon$ ist die Masse der Schale. Drücken wir u_3 durch ϱ_3 aus, so erhalten wir (§ 77, Nr. 2) für das Potential der Schale in einem äußeren Punkt den Ausdruck

$$2\pi\, abc\, \varepsilon \int_{-\infty}^{\varrho_3} \frac{d\varrho}{\sqrt{(a^2-\varrho)(b^2-\varrho)(c^2-\varrho)}}.$$

Die untere Grenze ϱ_3 ist die kleinste Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2-\varrho} + \frac{y^2}{b^2-\varrho} + \frac{z^2}{c^2-\varrho} = 1.$$

In einem Punkt des Hohlraumes, der von der Schale umschlossen wird, ist das Potential konstant

$$= 4\pi\, abc\, \varepsilon w = 2\pi\, abc\, \varepsilon \int_{-\infty}^{0} \frac{d\varrho}{\sqrt{(a^2-\varrho)(b^2-\varrho)(c^2-\varrho)}}.$$

§ 79. Potential eines Ellipsoids. Wir benutzen das Schlußresultat des vorigen Paragraphen, um das Potential eines mit homogener Masse von der Dichtigkeit 1 erfüllten Ellipsoids zu bestimmen. Dabei beschränken wir uns auf Punkte, die außerhalb des Ellipsoids liegen. Wir zerlegen das Ellipsoid in Schalen, die von ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden begrenzt sind. Die Schale, deren Halbachsen die Werte at, bt, ct haben, besitzt das Potential

(1) $$dV = 2\pi\, abc\, t^2 dt \int_{-\infty}^{\varrho_1} \frac{d\varrho}{\sqrt{(a^2t^2-\varrho)(b^2t^2-\varrho)(c^2t^2-\varrho)}}.$$

Die Größe ϱ_3 ist die kleinste Wurzel der Gleichung

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2t^2-\varrho}+\frac{y^2}{b^2t^2-\varrho}+\frac{z^2}{c^2t^2-\varrho}=1.$$

Um das Potential des ganzen Ellipsoids zu erhalten, müssen wir von $t=0$ bis $t=1$ integrieren.

Um die Variable t aus dem Integranden wegzuschaffen, setzen wir

$$\varrho = t^2 s \qquad \varrho_3 = t^2\tau.$$

Es folgt

$$(3) \qquad dV = 2\pi abc\,t\,dt\int\limits_{-\infty}^{\tau}\frac{ds}{\sqrt{(a^2-s)(b^2-s)(c^2-s)}},$$

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2-\tau}+\frac{y^2}{b^2-\tau}+\frac{z^2}{c^2-\tau}=t^2.$$

Unter τ ist die kleinste Wurzel dieser Gleichung zu verstehen.

Den Wert von τ, der dem Wert $t=1$ entspricht, bezeichnen wir mit σ. Mittelst partieller Integration ergibt sich aus (3)

$$V = abc\pi\int\limits_{-\infty}^{\sigma}\frac{ds}{\sqrt{(a^2-s)(b^2-s)(c^2-s)}}$$
$$-\,abc\pi\int\limits_{0}^{1}\frac{t^2}{\sqrt{(a^2-\tau)(b^2-\tau)(c^2-\tau)}}\frac{d\tau}{dt}\,dt.$$

In dem zweiten Integral rechts ersetzen wir t^2 durch seinen Wert (4) und führen an Stelle von t τ als Integrationsvariable ein. Der Gleichförmigkeit wegen schreiben wir dann s statt τ. Dem Wert $t=1$ entspricht $\tau=\sigma$, für $t=0$ wird τ negativ unendlich. Wir erhalten daher

$$(5) \qquad V = abc\pi\int\limits_{-\infty}^{\sigma}\Big[1-\frac{x^2}{a^2-s}-\frac{y^2}{b^2-s}-$$
$$-\frac{z^2}{c^2-s}\Big]\frac{ds}{\sqrt{(a^2-s)(b^2-s)(c^2-s)}}.$$

Die obere Integrationsgrenze σ ist die kleinste Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2-\sigma}+\frac{y^2}{b^2-\sigma}+\frac{z^2}{c^2-\sigma}=1.$$

Wenn der Punkt xyz innerhalb des Ellipsoids liegt, so ist in dem Integral (5) die obere Integrationsgrenze $= 0$ zu setzen. Auf den leicht zu führenden Beweis wollen wir der Kürze wegen nicht eingehen.

Das sphärische Pendel.

§ 80. Die Differentialgleichungen des Problems. Unter einem Pendel versteht man bekanntlich einen schweren Körper, der an einem Faden von geringem Gewicht aufgehängt ist, und in Bewegung gesetzt unter dem Einfluß der Schwere Schwingungen ausführt. In erster Annäherung betrachtet man den schweren Körper als unendlich klein, den Faden als gewichtslos und vollkommen starr, den Aufhängepunkt als vollkommen unbeweglich und man sieht überdies vom Einfluß des Luftwiderstandes und der Reibung ab. Unter diesen vereinfachenden Annahmen bezeichnet man den Apparat als mathematisches Pendel. Je nachdem die Bewegung in einer Ebene vor sich geht oder nicht, bezeichnet man sie als einfache oder als sphärische Pendelbewegung. Unter einem mathematischen Pendel versteht man demnach einen schweren materiellen Punkt, der gezwungen ist, sich auf einer Kugel zu bewegen.

Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt der Kugel ist; die z-Achse sei vertikal, die Richtung des wachsenden z gehe nach aufwärts. Den Radius der Kugel bezeichnen wir mit l.

Die Koordinaten des materiellen Punktes genügen der Bedingungsgleichung

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

und es gelten für sie die Differentialgleichungen

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \varrho x \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \varrho y \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -g + \varrho z.$$

Das Prinzip der lebendigen Kraft liefert das Integral

$$(3) \qquad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{2}h - gz.$$

Für die xy-Ebene gilt das Prinzip der Erhaltung der Flächen.

Es liefert das Integral

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c. \tag{4}$$

An Stelle der Koordinaten xy führen wir Polarkoordinaten ein; wir setzen

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi.$$

Aus (1) folgt

$$r^2 + z^2 = l^2. \tag{5}$$

Aus (3) folgt

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = h - 2gz \tag{6}$$

und aus (4) folgt

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = c. \tag{7}$$

Eliminieren wir mittelst der Gleichungen (5) und (7) aus (6) die Größen r und φ, so erhalten wir für z die Differentialgleichung

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (l^2 - z^2)(h - 2gz) - c^2 = f(z). \tag{8}$$

Aus dieser Gleichung folgt, wenn wir von dem später zu besprechenden Fall, daß z konstant ist, absehen:

$$t = \int\frac{l\,dz}{\sqrt{f(z)}}$$

und aus (7) und (8) folgt, wenn wir die Zeit eliminieren

$$\varphi = \int\frac{c\,l\,dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{f(z)}}.$$

Wir können demnach die Zeit t durch ein elliptisches Integral erster Gattung, den Winkel φ durch ein Integral dritter Gattung ausdrücken. Als unabhängige Variable erscheint in beiden Fällen der Abstand z des bewegten Punktes von der Horizontalebene, die durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Um das mechanische Problem vollständig zu erledigen, müssen wir aber die beiden Größen z und φ als Funktionen der Zeit darstellen. Wir haben es also mit einem Umkehrproblem zu tun.

§ 81. Darstellung der Größe z als Funktion der Zeit. Um vorerst Fallunterscheidungen zu vermeiden, schließen wir zunächst den Fall aus, daß die in der Gleichung (7) vorkommende Konstante c verschwindet, und wir schließen ferner den Fall aus, daß die Größe z konstant ist.

Nehmen wir an, zur Zeit t_0 verschwinde die Vertikalkomponente der Geschwindigkeit nicht; den zu dieser Zeit stattfindenden Wert von z bezeichnen wir mit z_0. Aus unserer Annahme folgt, daß die Funktion

$$f(z) = (l^2 - z^2)(h - 2gz) - c^2 \tag{1}$$

(Gleichung (8) des vorigen Paragraphen)

für $z = z_0$ einen von Null verschiedenen, positiven Wert besitzt. Für $z = \pm l$ ist der Funktionswert negativ, folglich besitzt die Gleichung $f(z) = 0$ eine zwischen $+l$ und z_0 und eine zwischen $-l$ und z_0 liegende reelle Wurzel. Für große Werte von z ist die Funktion positiv, folglich muß sie für einen Wert von z, der $> l$ ist, verschwinden. Die Gleichung $f(z) = 0$ besitzt also drei reelle Wurzeln $z_1 z_2 z_3$. Wir wählen die Bezeichnung so, daß

$$z_1 > l > z_2 > z_0 > z_3 > -l \tag{2}$$

ist. Diese Ungleichungen schließen die Gleichheit aus; die drei Wurzeln sind also untereinander verschieden.

Die Bahn, die das Pendel durchläuft, liegt, weil die Funktion $f(z)$ nicht negativ werden kann, zwischen den Horizontalebenen $z = z_2$ und $z = z_3$. Zwischen den drei Wurzeln z_ν und den Konstanten $glhc$ bestehen die bekannten Beziehungen

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{h}{2g}, \tag{3}$$

$$z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2 = -l^2 \tag{4}$$

$$z_1 z_2 z_3 = \frac{c^2 - l^2 h}{2g}. \tag{5}$$

Aus (4) folgt, daß wenigstens die kleinste der drei Wurzeln — z_3 — negativ sein muß. Da die Wurzel z_1 auf jeden Fall positiv ist, so schließen wir aus (5), daß die Wurzel z_2 das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Größe $c^2 - l^2 h$ besitzt.

Ist diese Größe positiv, so liegt die Bahn des Pendels ganz in der unteren Halbkugel.

Wir setzen nun

$$z = ax + b \tag{6}$$

und bestimmen die Konstanten a und b so, daß

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) \tag{7}$$

ist. Wir erhalten mit Rücksicht auf die Gleichung (8) des vorigen Paragraphen

$$a = \frac{2l^2}{g} \qquad b = \frac{h}{6g}. \tag{8}$$

Wir genügen der Differentialgleichung (7), indem wir

$$x = p(u) \quad \frac{du}{dt} = \pm 1 \tag{9}$$

setzen. Die erste dieser Gleichungen läßt, weil die Funktion $p(u)$ gerade ist, das Vorzeichen von u unbestimmt. Wir können deshalb festsetzen, es sei

$$\frac{du}{dt} = +1.$$

Weil die Größe z zwischen z_2 und z_3 liegt, so liegt $x = p(u)$ zwischen e_2 und e_3, folglich ist die Differenz $u - \omega_3$ einem reellen Wert kongruent. Indem wir die Zeit von einem Augenblick an zählen, in dem sich das Pendel im tiefsten Punkt seiner Bahn befindet, können wir daher

$$u = t + \omega_3 \tag{10}$$

setzen. Wir erhalten demnach mit Rücksicht auf (6), (8) und (9)

$$z = ap(u) + b = \frac{2l^2}{g} p(t + \omega_3) + \frac{h}{6g}. \tag{11}$$

Den Werten $t = 0$, $t = \omega_1$ entsprechen die Werte $x = e_3$, $z = z_3$ bzw. $x = e_2$, $z = z_2$, folglich ist

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{p(t + \omega_3) - e_3}{e_2 - e_3}. \tag{12}$$

Nun ist (§ 52, Nr. 9)

$$p(t + \omega_3) - e_3 = \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{p(t) - e_3},$$

folglich (§ 54, Nr. 9)

$$(13) \qquad \frac{z - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{e_1 - e_3}{p(t) - e_3} = (e_1 - e_3)\left[\frac{\sigma(t)}{\sigma_3(t)}\right]^2.$$

Wir führen an Stelle der σ-Funktionen die Funktionen H und Θ ein. Zufolge § 55, Nr. 5 u. 10 und § 63, Nr. 20 bis 24 ist

$$\frac{\sigma(t)}{\sigma_3(t)} = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}} \cdot \frac{H(t)}{\Theta(t)},$$

folglich

$$(14) \qquad \frac{z - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{1}{k}\left[\frac{H(t)}{\Theta(t)}\right]^2. {}^{*)}$$

Der Modul k hat den Wert

$$(15) \qquad k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} = \sqrt{\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}}.$$

Der Vertikalabstand z ist demnach eine periodische Funktion der Zeit; die Periode ist

$$2\omega_1 = 2\int_{z_3}^{z_2} \frac{l\,dz}{\sqrt{(l^2 - z^2)(h - 2gz) - c^2}}.$$

§ 82. Bestimmung des Winkels φ. Aus der Gleichung (7) des § 80 folgt mit Rücksicht auf die Gleichung (10) des vorigen Paragraphen:

$$d\varphi = \frac{c\,dt}{l^2 - z^2} = \frac{c}{2l}\left[\frac{du}{z + l} - \frac{du}{z - l}\right].$$

Wir denken uns die Achsen xy so gewählt, daß für $t = 0$ $u = \omega_3$ der Winkel $\varphi = 0$ ist und daß die Konstante c einen positiven Wert besitzt. Wir substituieren in die vorstehende Gleichung (s. Nr. 11 des vorigen Paragraphen)

$$z = ap(u) + b$$

und erhalten

$$(1) \qquad \varphi = \frac{c}{2l}\int_{\omega_3}^{u}\left[\frac{du}{ap(u) + b + l} - \frac{du}{ap(u) + b - l}\right].$$

---

*) Durch die Jacobischen Funktionen ausgedrückt ist

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_3} = \mathrm{sn}^2 \sqrt{e_1 - e_3} \cdot t.$$

Um die Integration ausführen zu können, müssen wir die Nullpunkte der beiden elliptischen Funktionen

$$z - l = a p(u) + b - l \quad \text{und} \quad z + l = a p(u) + b + l$$

bestimmen.

Die Größe l liegt zwischen den Wurzeln z_1 und z_2, folglich liegt der entsprechende Wert von $p(u)$ zwischen e_1 und e_2, die Differenz $u - \omega_1$ ist daher einem rein imaginären Wert kongruent (§ 45). Für $z = l$ ist

$$f(z) = l^2 \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = a^2 l^2 (p'(u))^2 = -c^2,$$

also

$$p'(u) = \pm \frac{c}{la} i.$$

Wir können daher einen reellen Wert α derart wählen, daß

$$(2) \qquad a p(i\alpha + \omega_1) + b = l \quad \text{und} \quad p'(i\alpha + \omega_1) = \frac{c}{la} i$$

ist.

Die Größe $-l$ ist $< z_3$, folglich ist der entsprechende Wert von $p(u) < e_3$ und der zugehörige Wert der Variabeln u ist einem rein imaginären Wert kongruent. Wir können daher eine reelle Größe β derart bestimmen, daß

$$(3) \qquad a p(i\beta) + b = -l \quad \text{und} \quad p'(i\beta) = \frac{c}{la} i$$

ist.

Substituieren wir die Werte (2) und (3) in (1), so folgt

$$(4) \qquad 2\varphi = \int_{\omega_3}^{u} \left[\frac{i p'(i\alpha + \omega_1) du}{p(u) - p(i\alpha + \omega_1)} - \frac{i p'(i\beta) du}{p(u) - p(i\beta)}\right].$$

Wir benutzen nun wieder die Formel (vgl. § 76, Nr. 19)

$$\frac{p'(w)}{p(u) - p(w)} = \zeta(u - w) - \zeta(u + w) + 2\zeta(w).$$

Es folgt

$$2\varphi = i \int_{\omega_3}^{u} [\zeta(u - i\alpha - \omega_1) - \zeta(u + i\alpha + \omega_1) + 2\zeta(i\alpha + \omega_1) \\ - \zeta(u - i\beta) + \zeta(u + i\beta) - 2\zeta(i\beta)]\, du.$$

Wir können nunmehr die Integration ausführen und erhalten

$$(5)\quad 2\varphi = i\log\frac{\sigma(u-i\alpha-\omega_1)\sigma(u+i\beta)}{\sigma(u+i\alpha+\omega_1)\sigma(u-i\beta)} + 2i[\zeta(i\alpha+\omega_1)-\zeta(i\beta)]u + \text{Konst.}$$

Die Integrationskonstante ist durch die Bedingung $\varphi = 0$ für $u = \omega_3$ bestimmt. Wir führen an Stelle der Variabeln u die Variable $t = u - \omega_3$ ein und setzen (§ 54, Nr. 10)

$$\sigma(u \pm i\beta) = \sigma(t+\omega_3 \pm i\beta) = \text{Konst.}\, e^{\eta_3 t}\sigma_3(t \pm i\beta),$$
$$\sigma(u+i\alpha+\omega_1) = \sigma(t+\omega_2+i\alpha) = \text{Konst.}\, e^{\eta_2 t}\sigma_2(t+i\alpha),$$
$$\sigma(u-i\alpha-\omega_1) = \sigma(t+\omega_2-i\alpha-2\omega_1) = \text{Konst.}\, e^{\eta_2 t}\sigma_2(t-i\alpha-2\omega_1)$$
$$= \text{Konst.}\, e^{(\eta_2-2\eta_1)t}\sigma_2(t-i\alpha),$$

(§ 55, Nr. 3)

$$\zeta(i\beta) = \frac{\sigma'(i\beta)}{\sigma(i\beta)},$$
$$\zeta(i\alpha+\omega_1) = \frac{\sigma'(i\alpha+\omega_1)}{\sigma(i\alpha+\omega_1)} = \frac{\sigma_1'(i\alpha)}{\sigma_1(i\alpha)} + \eta_1.$$

Substituieren wir diese Werte in (5), so ergibt sich

$$(6)\quad 2\varphi = i\log\frac{\sigma_2(t-i\alpha)\sigma_3(t+i\beta)}{\sigma_2(t+i\alpha)\sigma_3(t-i\beta)} + 2i\left[\frac{\sigma_1'(i\alpha)}{\sigma_1(i\alpha)} - \frac{\sigma'(i\beta)}{\sigma(i\beta)}\right]t.$$

Der Wert des Logarithmus ist so zu wählen, daß er für $t = 0$ verschwindet.

Es ist demnach keine additive Konstante hinzuzufügen, wenn dem Logarithmus der Wert beigelegt wird, der für $t = 0$ verschwindet.

Sodann führen wir an Stelle der σ-Funktionen die Θ-Funktionen ein. Wir erhalten (§ 55, Nr. 5 u. 10)

$$(7)\quad 2\varphi = i\log\frac{\Theta_1(t-i\alpha)\Theta(t+i\beta)}{\Theta_1(t+i\alpha)\Theta(t-i\beta)} + 2i\left[\frac{H_1'(i\alpha)}{H_1(i\alpha)} - \frac{H'(i\beta)}{H(i\beta)}\right]t.$$

Zähler und Nenner der zu logarithmierenden Funktion sind konjugiert imaginär, der Logarithmus hat deshalb einen rein imaginären Wert. Die logarithmischen Derivierten $\frac{H_1'(i\alpha)}{H_1(i\alpha)}$ und $\frac{H'(i\beta)}{H(i\beta)}$ sind ebenfalls rein imaginär. Folglich ergibt sich aus den Gleichungen (7), wie es sein muß, ein reeller Wert φ. Das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung (7) ist eine periodische Funktion mit der Periode $2\omega_1$, das zweite Glied ist der Zeit proportional. Da auch der Vertikalabstand z,

als Funktion der Zeit betrachtet, die Periode $2\omega_1$ besitzt, so kann man sich die Bewegung des sphärischen Pendels aus einer periodischen Bewegung und einer gleichförmigen Rotation um die z-Achse zusammengesetzt denken.

§ 83. Das einfache Pendel. Horizontale Pendelbewegung. Wir haben bisher den Fall ausgeschlossen, daß die Konstante c (§ 80, Nr. 7) verschwindet. Nehmen wir nunmehr an, es sei $c = 0$. In diesem Fall ist φ konstant, die Bewegung geht also in einer Ebene vor sich.

Die Differentialgleichung (8) des § 80 lautet in diesem Fall

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (l^2 - z^2)(h - 2gz) = f(z).$$

Der Quotient $\frac{h}{2g}$ kann nicht $< -l$ sein und wir dürfen auch den Fall, daß er $= -l$ ist, ausschließen, denn in diesem Fall müßte z den konstanten Wert $-l$ haben, das Pendel bliebe also in der Ruhelage.

Wenn $\frac{h}{2g} < l$ ist, so haben wir

$$z_1 = l, \quad z_2 = \frac{h}{2g}, \quad z_3 = -l$$

zu setzen (vgl. § 81). Das Pendel bewegt sich auf einem Kreisbogen hin und her, der durch die Gerade $z = z_2$ begrenzt ist.

Wenn dagegen $\frac{h}{2g} > l$ ist, so haben wir

$$z_1 = \frac{h}{2g}, \quad z_2 = l, \quad z_3 = -l$$

zu setzen. Das Pendel durchläuft einen vollen Kreis. Zwischen beiden Fällen steht als Grenzfall der Fall $h = 2gl$. Wir erhalten für diesen Fall die Differentialgleichung

$$l\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{2g}\,(l - z)\sqrt{l + z}.$$

Wir setzen $z = l\cos\psi$ und wählen den Winkel ψ so, daß

$$-\sin\psi\,\frac{d\psi}{dt} = +4\sqrt{\frac{g}{l}}\,\sin^2\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\psi$$

ist. Es folgt

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}}\int \frac{d\psi}{2\sin\frac{1}{2}\psi} = \sqrt{\frac{l}{g}}\log\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}\gamma}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}\psi}$$

und hieraus

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\psi = \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\gamma e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}.$$

Die Integrationskonstante γ ist der Anfangswert von ψ. Das Pendel nähert sich dem höchsten Punkt der Kugel, ohne ihn je zu erreichen.

Wir haben im § 81 auch den Fall ausgeschlossen, daß z konstant ist. In diesem Fall ist auch r konstant und aus der Gleichung (7) des § 80 folgt, daß der Winkel φ der Zeit proportional ist. Das Pendel bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit in einem Kreis, der in einer horizontalen Ebene liegt. Aus der Gleichung (4) des § 81 ergibt sich, daß z negativ ist, daß also der Kreis unterhalb des Mittelpunkts der Kugel liegt.

Rotation eines Körpers um seinen Schwerpunkt.

§ 84. Die kinematischen Gleichungen.*) Wir untersuchen die Bewegung eines starren Körpers unter der Voraussetzung, daß auf den Körper keine Kräfte wirken und daß sein Schwerpunkt festgehalten wird. Auf diese Aufgabe läßt sich bekanntlich eine etwas allgemeinere zurückführen. Die Bewegung eines freien starren Körpers, auf den nur die Schwere wirkt, kann man sich aus zwei Bewegungen zusammengesetzt denken: aus einer Bewegung, bei der jede Gerade, die zwei Punkte des Körpers verbindet, sich selbst parallel bleibt — diese Bewegung ist durch die Bewegung des Schwerpunkts vollständig bestimmt — und aus einer Rotation des Körpers um seinen Schwerpunkt, bei der dieser als festliegend gedacht ist.

Um die Bewegung des Körpers analytisch darzustellen, beziehen wir seine Punkte auf zwei rechtwinklige Koordinatensysteme, deren Anfangspunkt der Schwerpunkt des Körpers ist. Das erste derselben liege im Raume fest, das zweite sei fest mit dem Körper verbunden. Mit xyz bezeichnen wir die Koordinaten eines Punkts des Körpers in Beziehung auf das

*) Vgl. Kirchhoff, Mechanik 5. und 6. Vorlesung.

erste Koordinatensystem; $\xi\eta\zeta$ seien die Koordinaten desselben Punkts in Beziehung auf das zweite. Die beiden Koordinatensysteme sind durch eine orthogonale Substitution verbunden. Wir setzen

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta, \\ y = a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta, \\ z = a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta. \end{cases}$$

Die Substitutionskoeffizienten genügen den bekannten Gleichungen

$$(2)\qquad \sum_{\nu=1}^{3} a_{\lambda\nu}a_{\mu\nu} = \binom{\lambda}{\mu}, \quad \sum_{\nu=1}^{3} a_{\nu\lambda}a_{\nu\mu} = \binom{\lambda}{\mu} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3)^{*)}$$

Wir nehmen an, die beiden Koordinatensysteme seien gleich orientiert. Unter dieser Voraussetzung ist die Substitutionsdeterminante

$$(3)\qquad \sum \pm a_{11}a_{22}a_{33} = +1^{**)}$$

und es bestehen die Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{cases} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{33}, \quad a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} = a_{32}, \\ \qquad\qquad a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} = a_{31}. \end{cases}$$

Hierzu kommen zwei analoge Gleichungssysteme, die sich durch zyklische Vertauschung des Indizes ergeben.

Die Koordinaten $\xi\eta\zeta$ hängen nicht von der Zeit ab, dagegen sind die Koordinaten x, y, z und die Substitutionskoeffizienten $a_{\lambda\mu}$ Funktionen der Zeit t. Nach t genommene Differentialquotienten bezeichnen wir in üblicher Weise durch Akzente.

Aus den Gleichungen (2) ergeben sich Bedingungsgleichungen zwischen den Derivierten der Substitutionskoeffizienten. Wir können sie in folgender Form schreiben:

---

*) Das Symbol $\binom{\lambda}{\mu}$ bedeutet 1 oder 0, je nachdem die Indizes λ, μ gleich oder ungleich sind.

**) Wären die beiden Koordinatensysteme nicht gleich orientiert, also nicht zur Deckung zu bringen, so wäre die Substitutionsdeterminante $= -1$.

$$(5)\begin{cases} \sum_\nu a_{\nu 1} a'_{\nu 1} = 0, \quad \sum_\nu a_{\nu 2} a'_{\nu 2} = 0, \quad \sum_\nu a_{\nu 3} a'_{\nu 3} = 0, \\ \sum_\nu a'_{\nu 2} a_{\nu 3} = -\sum_\nu a'_{\nu 3} a_{\nu 2} = \alpha_1, \\ \sum_\nu a'_{\nu 3} a_{\nu 1} = -\sum_\nu a'_{\nu 1} a_{\nu 3} = \alpha_2, \\ \sum_\nu a'_{\nu 1} a_{\nu 2} = -\sum_\nu a'_{\nu 2} a_{\nu 1} = \alpha_3. \end{cases}$$

Die eben eingeführten Größen $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ haben eine einfache mechanische Bedeutung: es sind die Komponenten der zur Zeit t stattfindenden momentanen Drehung des Körpers geschätzt nach den Richtungen, die die mit dem Körper fest verbundenen Koordinatenachsen $\xi \eta \zeta$ zu dieser Zeit besitzen. Die Kosinusse der Winkel, die die Momentanachse mit diesen Richtungen bildet, sind zu den Größen $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ proportional.

Wir multiplizieren die Gleichungen (5)

$$\sum_\nu a'_{\nu 1} a_{\nu 1} = 0, \quad \sum_\nu a'_{\nu 1} a_{\nu 2} = \alpha_3, \quad \sum_\nu a'_{\nu 1} a_{\nu 3} = -\alpha_2$$

beziehungsweise mit $a_{\lambda 1} a_{\lambda 2} a_{\lambda 3}$ und addieren sie dann; es folgt mit Rücksicht auf (2)

$$(6)\begin{cases} a'_{\lambda 1} = a_{\lambda 2} \alpha_3 - a_{\lambda 3} \alpha_2 \\ \text{und hieraus durch zyklische Vertauschung der Indizes} \\ a'_{\lambda 2} = a_{\lambda 3} \alpha_1 - a_{\lambda 1} \alpha_3, \\ a'_{\lambda 3} = a_{\lambda 1} \alpha_2 - a_{\lambda 2} \alpha_1. \end{cases}$$

Die drei Reihen von Substitutionskoeffizienten $a_{\lambda 1} a_{\lambda 2} a_{\lambda 3}$ $(\lambda = 1, 2, 3)$ genügen demnach demselben System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 85. Die Differentialgleichungen des Problems.

Die lebendige Kraft des Körpers ist

$$(1) \qquad T = \tfrac{1}{2} \int (x'^2 + y'^2 + z'^2)\, dm,$$

wo dm ein Massenelement des Körpers bedeutet.

Auf Grund des Hamiltonschen Prinzips erhalten wir die Differentialgleichungen der Bewegung, indem wir zum Aus-

druck bringen, daß die Variation

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T\,dt$$

für alle mit den Bedingungen des Systems verträglichen Variationen der Koordinaten verschwindet. Im vorliegenden Fall ist es aber unnötig, diese Rechnung durchzuführen, da wir sofort vier Integrale dieser Differentialgleichungen angeben können. Eines derselben ergibt sich aus dem Satz von der Erhaltung der Kraft

$$2T = h. \tag{2}$$

Die drei anderen liefern die Flächensätze

$$\begin{cases} \int (yz' - zy')\,dm = c_1 \\ \int (zx' - xz')\,dm = c_2 \\ \int (xy' - yx')\,dm = c_3. \end{cases} \tag{3}$$

In diesen Integralen müssen wir nun an Stelle der Koordinaten xyz, die sich auf ein im Raum festes Koordinatensystem beziehen, die Koordinaten $\xi\eta\zeta$ einführen, deren Achsen mit dem Körper fest verbunden sind.

Über die beiden Koordinatensysteme haben wir bisher noch keine nähere Bestimmung getroffen; wir wollen nun festsetzen, das Koordinatensystem xyz werde so gewählt, daß die in den Flächensätzen vorkommenden Konstanten c_1 und c_2 verschwinden und daß c_3 positiv ist. Die Richtung der wachsenden z kann nach Belieben festgesetzt werden. Ist dies geschehen, so ist das Koordinatensystem bis auf eine Drehung um die z-Achse bestimmt.

Die Achsen des zweiten Koordinatensystems $\xi\eta\zeta$ lassen wir in die Hauptträgheitsachsen des Körpers fallen; genauere Bestimmungen über die Zuordnung werden wir im nächsten Paragraphen treffen. Für zwei von den Achsen können wir die positive Richtung nach Belieben festsetzen, für die dritte ist diese Richtung durch die Bedingung bestimmt, daß die Achsen $\xi\eta\zeta$ ebenso orientiert sein sollen wie die Achsen xyz. Infolge dessen können wir uns so einrichten, daß zu einer

bestimmten Zeit t_0 zwei von den Größen $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ ein vorgeschriebenes Vorzeichen besitzen.

Zufolge der getroffenen Bestimmung ist

$$(4) \qquad \int \eta \zeta \, dm = 0 \quad \int \zeta \xi \, dm = 0 \quad \int \xi \eta \, dm = 0 .$$

Wir setzen

$$(5) \qquad \begin{cases} \int (\eta^2 + \zeta^2) \, dm = P_1 \quad \int (\zeta^2 + \xi^2) \, dm = P_2 \\ \int (\xi^2 + \eta^2) \, dm = P_3 . \end{cases}$$

Aus (1) folgt mit Rücksicht auf die erste Gleichung des vorigen Paragraphen

$$2T = \int [(a'_{11} \xi + a'_{12} \eta + a'_{13} \zeta)^2 + (a'_{21} \xi + a'_{22} \eta + a'_{23} \zeta)^2 + \\ + (a'_{31} \xi + a'_{32} \eta + a'_{33} \zeta)^2] \, dm .$$

Wegen (4) ist demnach

$$(6) \quad 2T = \sum_\lambda a'^2_{\lambda 1} \int \xi^2 dm + \sum_\lambda a'^2_{\lambda 2} \int \eta^2 dm + \sum_\lambda a'^2_{\lambda 3} \int \zeta^2 dm .$$

Nun folgt aus den Gleichungen (2) und (6) des vorigen Paragraphen

$$\sum_\lambda a'^2_{\lambda 1} = \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \quad \sum_\lambda a'^2_{\lambda 2} = \alpha_3^2 + \alpha_1^2 \quad \sum_\lambda a'^2_{\lambda 3} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 .$$

Führen wir diese Werte in (6) ein, so ergibt sich mit Rücksicht auf (2) und (5)

$$(7) \qquad P_1 \alpha_1^2 + P_2 \alpha_2^2 + P_3 \alpha_3^2 = h .$$

Aus der ersten Gleichung des vorigen Paragraphen folgt ferner mit Rücksicht auf (4)

$$(8) \begin{cases} \int (y z' - z y') \, dm = \int [(a_{21} \xi + a_{22} \eta + a_{23} \zeta)(a'_{31} \xi + a'_{32} \eta + a'_{33} \zeta) \\ \qquad - (a_{31} \xi + a_{32} \eta + a_{33} \zeta)(a'_{21} \xi + a'_{22} \eta + a'_{23} \zeta)] \, dm \\ \qquad = (a_{21} a'_{31} - a_{31} a'_{21}) \int \xi^2 dm + (a_{22} a'_{32} - a_{32} a'_{22}) \int \eta^2 dm \\ \qquad\qquad + (a_{23} a'_{33} - a_{33} a'_{32}) \int \zeta^2 dm . \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (4) und (6) des vorigen Paragraphen folgt nach einer leichten Rechnung

$$a_{21}a_{31}' - a_{31}a_{21}' = a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3$$
$$a_{22}a_{32}' - a_{32}a_{22}' = a_{11}\alpha_1 + a_{13}\alpha_3$$
$$a_{23}a_{33}' - a_{33}a_{32}' = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2.$$

Führen wir diese Werte in (8) ein, so folgt mit Rücksicht auf (3) und (5)

$$P_1 a_{11}\alpha_1 + P_2 a_{12}\alpha_2 + P_3 a_{13}\alpha_3 = c_1 = 0 \tag{9}$$

und hieraus folgt durch zyklische Vertauschung der Indizes

$$P_1 a_{21}\alpha_1 + P_2 a_{22}\alpha_2 + P_3 a_{23}\alpha_3 = c_2 = 0 \tag{10}$$
$$P_1 a_{31}\alpha_1 + P_2 a_{32}\alpha_2 + P_3 a_{33}\alpha_3 = c_3 = c. \tag{11}$$

Multiplizieren wir die Gleichungen (9), (10) und (11) beziehungsweise mit $a_{1\lambda} a_{2\lambda} a_{3\lambda}$ und addieren, so folgt mit Rücksicht auf die Gleichung (2) des vorigen Paragraphen

$$P_\lambda \alpha_\lambda = c a_{3\lambda} \qquad \lambda = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Wenn wir diese Gleichungen quadrieren und dann addieren, so ergibt sich

$$P_1^2\alpha_1^2 + P_2^2\alpha_2^2 + P_3^2\alpha_3^2 = c^2. \tag{13}$$

Setzen wir in den Gleichungen (6) des vorigen Paragraphen den Index $\lambda = 3$ und eliminieren wir mittelst (12) die Größen $a_{31} a_{32} a_{33}$, so folgt

$$\begin{aligned} P_1\alpha_1' &= (P_2 - P_3)\,\alpha_2\alpha_3 \\ P_2\alpha_2' &= (P_3 - P_1)\,\alpha_3\alpha_1 \\ P_3\alpha_3' &= (P_1 - P_2)\,\alpha_1\alpha_2. \end{aligned} \tag{14}$$

In diesen Gleichungen kommen nur mehr die drei Drehungskomponenten α_λ vor.

§ 86. Darstellung der Drehungskomponenten α_λ.

Aus den Gleichungen (7) und (13) des vorigen Paragraphen folgt:

$$P_1(c^2 - hP_1)\alpha_1^2 + P_2(c^2 - hP_2)\alpha_2^2 + P_3(c^2 - hP_3)\,\alpha_3^2 = 0 \tag{1}$$

Diese Gleichung läßt ersehen, daß die Momentenachse der Drehung in dem Körper einen Kegel zweiter Ordnung beschreibt, dessen Achsen in die Trägheitsachsen des Körpers fallen.

Die drei Differenzen

$$(2) \qquad c^2 - hP_1 \qquad c^2 - hP_2 \qquad c^2 - hP_3$$

können nicht alle dasselbe Vorzeichen besitzen. Wir wollen die Bezeichnung so wählen, daß P_2 das mittlere Trägheitsmoment ist und daß die beiden ersten Differenzen gleiche Vorzeichen haben. Je nachdem sie positiv oder negativ sind, haben wir die beiden Fälle zu unterscheiden:

$$\text{I} \qquad P_1 < P_2 < P_3$$

und

$$\text{II} \qquad P_1 > P_2 > P_3.$$

Zufolge dieser Bestimmung liegt die ζ-Achse im Innern des Kegels (1).

Im Fall I entspricht ihr das größte, im Fall II das kleinste Trägheitsmoment. Der η-Achse entspricht auf jeden Fall das mittlere Trägheitsmoment.

Wir beschränken uns im folgenden auf den allgemeinen Fall: wir nehmen an, daß die Trägheitsmomente verschieden sind, daß keine der Differenzen (2) verschwindet und daß keine der Drehungskomponenten beständig gleich Null ist. Diese ausgeschlossenen Fälle bieten analytisch kein Interesse.

Die Differentialgleichungen (14) des vorigen Paragraphen, denen die Drehungskomponenten genügen, zeigen die größte Analogie mit den Differentialgleichungen

$$\frac{d\,\mathrm{sn}\,v}{dv} = \mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v \qquad \frac{d\,\mathrm{cn}\,v}{dv} = -\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v \qquad \frac{d\,\mathrm{dn}\,v}{dv} = -\,k^2\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v$$

denen die Jacobischen Funktionen genügen (§ 66, Nr. 23 und 24).

Um die beiden Systeme in Übereinstimmung zu bringen, setzen wir

$$(3) \qquad v = n(t - t_0)$$

$$(4) \qquad \alpha_1 = \varrho_1\,\mathrm{cn}\,v \qquad \alpha_2 = \varrho_2\,\mathrm{sn}\,v \qquad \alpha_3 = \varrho_3\,\mathrm{dn}\,v.$$

Substituieren wir diese Werte in die Gleichungen (14) des vorigen Paragraphen, so folgt

$$(5) \qquad \begin{cases} P_1 n \varrho_1 = (P_3 - P_2)\varrho_2\varrho_3 \qquad P_2 n \varrho_2 = (P_3 - P_1)\varrho_1\varrho_3 \\ \qquad P_3 k^2 n \varrho_3 = (P_2 - P_1)\varrho_1\varrho_2. \end{cases}$$

(6) $P_1 P_2 P_3 k^2 n^3 = (P_3 - P_2)(P_3 - P_1)(P_2 - P_1)\varrho_1\varrho_2\varrho_3$.

Substituieren wir die Werte (4) in die Gleichungen (7) und (13) des vorigen Paragraphen, so folgt

$$(7) \qquad P_1\varrho_1^2 \operatorname{cn}^2 v + P_2\varrho_2^2 \operatorname{sn}^2 v + P_3\varrho_3^2 \operatorname{dn}^2 v = h$$

$$(8) \qquad P_1^2\varrho_1^2 \operatorname{cn}^2 v + P_2^2\varrho_2^2 \operatorname{sn}^2 v + P_3^2\varrho_3^2 \operatorname{dn}^2 v = c^2.$$

Um die Vorzeichen der Größen $n\varrho_1\varrho_2\varrho_3$ zu bestimmen, setzen wir fest: die Größe n sei positiv; die Richtungen der wachsenden ξ und ζ wählen wir so, daß zur Zeit $t = t_0$ die Drehungskomponenten α_1 und α_3 positive Werte besitzen. Zufolge dieser Annahmen sind die Größen ϱ_1 und ϱ_3 positiv (4); die Größe ϱ_2 ist — wie aus (6) hervorgeht — positiv im Fall I, negativ im Fall II.

Drückt man in den Gleichungen (7) und (8) $\operatorname{cn}^2 v$ und $\operatorname{dn}^2 v$ durch $\operatorname{sn}^2 v$ aus, so erhält man die Gleichungen

$$(9) \qquad \begin{cases} P_1\varrho_1^2 + P_3\varrho_3^2 = h & P_1^2\varrho_1^2 + P_3^2\varrho_3^2 = c^2 \\ P_1\varrho_1^2 + k^2 P_3\varrho_3^2 = P_2\varrho_2^2 & P_1^2\varrho_1^2 + k^2 P_3^2\varrho_3^2 = P_2^2\varrho_2^2. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$(10) \quad \varrho_1 = \sqrt{\frac{hP_3 - c^2}{P_1(P_3 - P_1)}} \quad \varrho_2 = \pm\sqrt{\frac{hP_3 - c^2}{P_2(P_3 - P_2)}} \quad \varrho_3 = \sqrt{\frac{c^2 - hP_1}{P_3(P_3 - P_1)}}$$

$$(11) \quad k = \sqrt{\frac{(P_2 - P_1)(hP_3 - c^2)}{(P_3 - P_2)(c^2 - hP_1)}} \qquad k' = \sqrt{\frac{(P_3 - P_1)(c^2 - hP_2)}{(P_3 - P_2)(c^2 - hP_1)}}.$$

Aus (5) folgt sodann

$$(12) \qquad n = \sqrt{\frac{(P_3 - P_2)(c^2 - hP_1)}{P_1 P_2 P_3}}.$$

Die Quadratwurzeln sind sämtlich positiv zu nehmen. In dem Ausdruck für ϱ_2 entspricht das obere Zeichen dem Fall I, das untere dem Fall II.

Die Gleichungen (4) zeigen, daß die Momentanachse der Drehung eine periodische Bewegung ausführt, denn die Funktionen $\operatorname{sn} v$ $\operatorname{cn} v$ $\operatorname{dn} v$ besitzen die gemeinsame Periode $4K$. Nach Ablauf der Zeit $T = \frac{4K}{n}$ kehrt demnach die Momentanachse in ihre ursprüngliche Stellung im Körper zurück und die Komponenten der Drehung nehmen wieder dieselben Werte an.

§ 87. Darstellung der Substitutionskoeffizienten $a_{\lambda\mu}$.

Von den neun Substitutionskoeffizienten $a_{\lambda\mu}$ sind drei durch die Gleichungen (12) des § 85 bestimmt

$$(1) \qquad a_{31} = \frac{P_1}{c}\alpha_1 \qquad a_{32} = \frac{P_2}{c}\alpha_2 \qquad a_{33} = \frac{P_3}{c}\alpha_3 .$$

Die übrigen sechs Koeffizienten lassen sich rational durch diese und eine komplexe Größe

$$(2) \qquad Z = a_{13} + i a_{23}$$

ausdrücken. Es ist nämlich

$$\frac{a_{11} + i a_{21}}{a_{13} + i a_{23}} = \frac{a_{11} a_{13} + a_{21} a_{23} + i(a_{21} a_{13} - a_{11} a_{23})}{a_{13}^2 + a_{23}^2}$$

$$= \frac{-a_{31} a_{33} + i a_{32}}{1 - a_{33}^2} \qquad (\S\ 84,\ \text{Nr. 2 und 4})$$

folglich

$$(3) \qquad X = a_{11} + i a_{21} = -\frac{a_{31} a_{33} - i a_{32}}{1 - a_{33}^2} Z.$$

Analog ergibt sich

$$(4) \qquad Y = a_{12} + i a_{22} = -\frac{a_{32} a_{33} + i a_{31}}{1 - a_{33}^2} Z.$$

Aus den Differentialgleichungen (6) des § 84 folgt

$$\frac{d(a_{13} + i a_{23})}{dt} = (a_{11} + i a_{21})\alpha_2 - (a_{12} + i a_{22})\alpha_1 .$$

Wir substituieren die Werte (1) bis (4) und erhalten:

$$\frac{d \log Z}{dt} = \frac{c}{1 - a_{33}^2}\left[-\frac{1}{P_2}(a_{31} a_{33} - i a_{32}) a_{32} + \frac{1}{P_1}(a_{32} a_{33} + i a_{31}) a_{31}\right]$$

$$= \frac{c(P_2 - P_1)}{P_1 P_2}\,\frac{a_{31} a_{32} a_{33}}{1 - a_{33}^2} + \frac{i c}{1 - a_{33}^2}\left(\frac{a_{31}^2}{P_1} + \frac{a_{32}^2}{P_2}\right).$$

Aus den Gleichungen (7) des § 85 folgt mit Rücksicht auf (1)

$$\frac{a_{31}^2}{P_1} + \frac{a_{32}^2}{P_2} = \frac{h}{c^2} - \frac{a_{33}^2}{P_3} = \frac{h P_3 - c^2}{c^2 P_3} + \frac{1 - a_{33}^2}{P_3} .$$

Wir substituieren diesen Wert in die vorhergehende Gleichung und führen an Stelle der unabhängigen Variabeln t die Variable $v = n(t - t_0)$ ein. Es folgt

$$(5) \quad \frac{d \log Z}{dv} = \frac{c(P_2 - P_1)}{n P_1 P_2}\,\frac{a_{31} a_{32} a_{33}}{1 - a_{33}^2} + i\,\frac{h P_3 - c^2}{n c P_3}\,\frac{1}{1 - a_{33}^2} + i\,\frac{c}{n P_3} .$$

Die rechte Seite dieser Gleichung müssen wir nun durch elliptische Funktionen ausdrücken.

Aus der Gleichung (4) des vorigen Paragraphen folgt mit Rücksicht auf (1)

$$(6) \qquad 1 - a_{33}^2 = 1 - \frac{P_3^2}{c^2}\varrho_3^2 \operatorname{dn}^2 v\cdot$$

Wir bestimmen nun eine Größe v_0 durch die Gleichung

$$(7) \qquad \operatorname{dn} v_0 = \frac{c}{P_3 \varrho_3} = c\sqrt{\frac{P_3 - P_1}{P_3(c^2 - hP_1)}}$$

(Gleichung (10) des vorigen Paragraphen).

Aus dieser Gleichung folgt mit Rücksicht auf die Gleichung (11) des vorigen Paragraphen

$$\operatorname{sn}^2 v_0 = \frac{1 - \operatorname{dn}^2 v_0}{k^2} = -\frac{P_1(P_3 - P_2)}{P_3(P_2 - P_1)}$$

und

$$\operatorname{cn}^2 v_0 = 1 - \operatorname{sn}^2 v_0 = \frac{P_2(P_3 - P_1)}{P_3(P_2 - P_1)}.$$

Die Größe $\operatorname{sn} v_0$ ist rein imaginär, die Größen $\operatorname{dn} v_0$ und $\operatorname{cn} v_0$ sind reell. Wir können demnach der Gleichung (7) durch einen rein imaginären Wert $v_0 = iw$ genügen (vgl. § 66, Nr. 19) und können w positiv und $< K'$ annehmen. Unter dieser Annahme ist $\operatorname{cn} iw$ positiv und $\operatorname{sn} iw$ positiv imaginär. Wir setzen also

$$(8) \qquad \begin{cases} \operatorname{sn} iw = i\sqrt{\dfrac{P_1(P_3 - P_2)}{P_3(P_2 - P_1)}}, \quad \operatorname{cn} iw = \sqrt{\dfrac{P_2(P_3 - P_1)}{P_3(P_2 - P_1)}}, \\ \qquad\qquad \operatorname{dn} iw = c\sqrt{\dfrac{P_3 - P_1}{P_3(c^2 - hP_1)}}. \end{cases}$$

Die Quadratwurzeln sind positiv zu nehmen.

Aus den Gleichungen (8) folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (10) und (11) des vorigen Paragraphen

$$(9) \qquad \frac{P_1\varrho_1}{c} = -ik\frac{\operatorname{sn} iw}{\operatorname{dn} iw}, \quad \frac{P_2\varrho_2}{c} = \pm k\frac{\operatorname{cn} iw}{\operatorname{dn} iw}, \quad \frac{P_3\varrho_3}{c} = \frac{1}{\operatorname{dn} iw}.$$

Das obere Zeichen auf der rechten Seite der zweiten Gleichung entspricht wieder dem Fall I, das untere dem Fall II.

Aus den Gleichungen (1) und den Gleichungen (4) des vorigen Paragraphen folgt nun

$$(10) \quad a_{31} = -ik\frac{\operatorname{sn} iw \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} iw}, \quad a_{32} = \pm k\frac{\operatorname{cn} iw \operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} iw}, \quad a_{33} = \frac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{dn} iw}.$$

Aus den Gleichungen (9) folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (10) und (11) des vorigen Paragraphen:

$$\mp ik^2 c \frac{\operatorname{sn} iw \operatorname{cn} iw}{\operatorname{dn} iw} = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_3} \cdot \frac{P_1 P_2}{P_3} = \pm \sqrt{\frac{P_1 P_2 (hP_3 - c^2)^2}{P_3 (P_3 - P_2)(c^2 - hP_1)}}.$$

Die Wurzel ist positiv zu nehmen; es ist also

$$\sqrt{(hP_3 - c^2)^2} = \pm (hP_3 - c^2)$$

zu setzen.

Wir erhalten demnach mit Rücksicht auf die Gleichung (12) des vorigen Paragraphen

$$\mp ik^2 c \frac{\operatorname{sn} iw \operatorname{cn} iw}{\operatorname{dn} iw} = \frac{hP_3 - c^2}{nP_3}$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf (10)

$$i \frac{hP_3 - c^2}{ncP_3} \frac{1}{1 - a_{33}^2} = \pm k^2 \frac{\operatorname{sn} iw \operatorname{cn} iw \operatorname{dn} iw}{\operatorname{dn}^2 iw - \operatorname{dn}^2 v}. \tag{11}$$

Um den reellen Teil der rechten Seite von (5) durch elliptische Funktionen auszudrücken, bemerken wir, daß der absolute Betrag (2)

$$|Z| = \sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2} = \sqrt{1 - a_{33}^2}$$

ist. Folglich ist die reelle Größe

$$\frac{c(P_2 - P_1)}{nP_1 P_2} \frac{a_{31} a_{32} a_{33}}{1 - a_{33}^2} = \frac{1}{2} \frac{d \log (1 - a_{33}^2)}{dv} = \frac{1}{2} \frac{d \log (\operatorname{dn}^2 iw - \operatorname{dn}^2 v)}{dv} \tag{10}$$

oder

$$\frac{c(P_2 - P_1)}{nP_1 P_2} \frac{a_{31} a_{32} a_{33}}{1 - a_{33}^2} = \frac{k^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{dn}^2 iw - \operatorname{dn}^2 v}. \tag{12}$$

Substituieren wir die Ausdrücke (11) und (12) in (5), so folgt

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d \log Z}{dv} = k^2 & \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \pm \operatorname{sn} iw \operatorname{cn} iw \operatorname{dn} iw}{\operatorname{dn}^2 iw - \operatorname{dn}^2 v} \\ & + i \frac{c}{nP_3} = f(v) + i \frac{c}{nP_3}. \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Die Funktion $f(v)$ ist eine doppelt periodische Funktion der Variabeln v mit den Perioden $2K$ und $2iK'$. Für $v = \mp iw$ werden Zähler und Nenner von $f(v)$ zur ersten Ordnung Null, der Quotient bleibt stetig. Dagegen wird die Funktion für $v = \pm iw$ zur ersten Ordnung unendlich. Für $v = iK'$ wird jede der Funktionen $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ zur ersten Ordnung unendlich, die Funktion $f(v)$ wird also ebenfalls zur ersten Ord-

nung unendlich. Die Punkte iK' und $\pm iw$ sind die einzigen Unstetigkeitspunkte der Funktion $f(v)$ im fundamentalen Periodenparallelogramm. Die doppelt periodische Funktion $f(v)$ ist also von der zweiten Ordnung. Wegen

$$\lim_{v=iK'} (v - iK') \frac{k^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v} = 1 \quad (\text{vgl. § 66, Nr. 15})$$

ist das dem Punkt $v = iK'$ entsprechende Residuum -1, das dem Punkt $v = \pm iw$ entsprechende Residuum ist daher $+1$.

Die doppelt periodische Funktion

$$\frac{H'(v \mp iw)}{H(v \mp iw)} - \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}$$

besitzt dieselben Unstetigkeitspunkte wie die Funktion $f(v)$ und den Unstetigkeitspunkten iK' und $\pm iw$ entsprechen die Residuen -1 und $+1$. Folglich ist die Differenz

$$f(v) - \frac{H'(v \mp iw)}{H(v \mp iw)} + \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} = \text{Konst.} \tag{14}$$

Um die Konstante zu bestimmen, bemerken wir, daß

$$f(0) = \frac{\pm k^2 \operatorname{sn} iw \operatorname{cn} iw \operatorname{dn} iw}{-k^2 \operatorname{sn}^2 iw} = \mp \frac{\operatorname{cn} iw \operatorname{dn} iw}{\operatorname{sn} iw}$$

ist. Nun ist

$$\frac{d \log \operatorname{sn} v}{d v} = \frac{\operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} v} = \frac{H'(v)}{H(v)} - \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)},$$

also

$$f(0) = \mp \frac{H'(iw)}{H(iw)} \pm \frac{\Theta'(iw)}{\Theta(iw)}.$$

Setzen wir in (14) $v = 0$, so folgt mit Rücksicht auf die vorstehende Gleichung

$$\text{Konst.} = \pm \frac{\Theta'(iw)}{\Theta(iw)}.$$

Wir erhalten also

$$f(v) = \frac{H'(v \mp iw)}{H(v \mp iw)} - \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} \pm \frac{\Theta'(iw)}{\Theta(iw)}. \tag{15}$$

Wir substituieren diesen Ausdruck in (13) und setzen zur Abkürzung

$$i \frac{c}{nP_s} \pm \frac{\Theta'(iw)}{\Theta(iw)} = im.$$

Der Quotient $\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}$ ist eine ungerade Funktion, die für reelle Werte des Arguments reelle Werte annimmt, folglich entsprechen rein imaginären Werten des Arguments rein ima-

ginäre Funktionswerte. Daraus folgt, daß die Konstante m reell ist.

Die Integration der Gleichung (13) ergibt

$$Z = \text{Konst.}\, e^{imv} \frac{H(v \mp iw)}{\Theta(v)}. \tag{16}$$

Es erübrigt, die Integrationskonstante zu bestimmen. Wir erinnern daran, daß wir das Koordinatensystem xyz nur bis auf eine Drehung um die z-Achse bestimmt haben. Wir wollen nun festsetzen, zur Zeit t_0 stehe die y-Achse auf der ζ-Achse senkrecht und die x-Achse bilde mit der ζ-Achse einen spitzen Winkel. Es ist also für $t = t_0$, $v = 0$ (§ 84, Nr. 1)

$$a_{23} = 0 \quad \text{und} \quad Z = a_{13}$$

reell und positiv.

Für $v = 0$ ist daher (10)

$$Z = +\sqrt{1 - a_{33}^2} = a_{31} = -ik \frac{\operatorname{sn} iw}{\operatorname{dn} iw} = -i \frac{H_1(0)}{\Theta(0)} \frac{H(iw)}{\Theta_1(iw)}.$$

Aus (16) folgt für $v = 0$

$$Z = \mp \text{Konst.} \frac{H(iw)}{\Theta(0)}.$$

Der Vergleich gibt

$$\text{Konst.} = \pm i \frac{H_1(0)}{\Theta_1(iw)}.$$

Wir erhalten demnach (16)

$$Z = a_{13} + i a_{23} = \pm i e^{imv} \frac{H_1(0) H(v \mp iw)}{\Theta_1(iw)\Theta(v)}. \tag{17}$$

§ 88. Zusammenstellung der Formeln. Durch die Gleichungen (3), (4), (10) und (17) des vorigen Paragraphen ist die Aufgabe, die Substitutionskoeffizienten $a_{\lambda\mu}$ als einwertige Funktionen der Zeit darzustellen, gelöst. Wir wollen aber den Formeln (3) und (4) noch eine elegantere Gestalt geben. Substituieren wir die Werte (10), so folgt:

$$\frac{X}{Z} = ik \frac{\operatorname{sn} iw \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \pm \operatorname{cn} iw \operatorname{dn} iw \operatorname{sn} v}{\operatorname{dn}^2 iw - \operatorname{dn}^2 v}, \tag{1}$$

$$\frac{Y}{Z} = k \frac{\mp \operatorname{cn} iw \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v - \operatorname{sn} iw \operatorname{dn} iw \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn}^2 iw - \operatorname{dn}^2 v}. \tag{2}$$

Die Funktion $\frac{X}{Z}$ besitzt, ebenso wie die Funktion $\operatorname{sn} v$, die Perioden $4K$ und $2iK'$ (§ 66, Nr. 10) und sie ändert eben-

falls nur ihr Vorzeichen, wenn die Variable v um $2K$ wächst (§ 66, Nr. 7 bis 9). Folglich besitzt die Funktion

$$f(v) = \frac{X}{Z} \operatorname{sn}(v \mp iw)$$

die Perioden $2K$ und $2iK'$. Die Funktion $f(v)$ bleibt in den Punkten $v = iw$ und $v = -iw$, den Nullpunkten der Funktion $\operatorname{dn}^2 iw - \operatorname{dn}^2 v$, stetig und sie bleibt auch im Punkt $v = iK'$, dem Unstetigkeitspunkt der Funktionen $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ stetig. Sie könnte im fundamentalen Periodenparallelogramm daher höchstens im Punkt $v = \pm iw + iK'$ unstetig werden; da es aber keine doppelt periodische Funktion erster Ordnung gibt, so muß sie auch in diesem Punkt stetig bleiben und demnach einen konstanten Wert besitzen. Setzen wir $v = 0$, so folgt (1)

$$f(v) = f(0) = \frac{ik \operatorname{sn} iw}{-k^2 \operatorname{sn}^2 iw} \cdot \mp \operatorname{sn} iw = \pm \frac{i}{k}.$$

Folglich ist

$$\text{(3)} \qquad \frac{X}{Z} = \pm \frac{i}{k \operatorname{sn}(v \mp iw)} = \pm i \frac{\Theta_1(0)}{H_1(0)} \frac{\Theta(v \mp iw)}{H(v \mp iw)}.$$

Die Funktion $\frac{Y}{Z}$ (2) besitzt ebenso wie die Funktion $\operatorname{cn} v$ die beiden Perioden $4K$ und $4iK'$ und sie ändert ebenfalls nur ihr Vorzeichen, wenn die Variable v um $2K$ oder $2iK'$ wächst (§ 66, Nr. 7 bis 9), folglich besitzt die Funktion

$$f(v) = \frac{Y}{Z} \frac{\operatorname{sn}(v \mp iw)}{\operatorname{dn}(v \mp iw)}$$

die beiden Perioden $2K$ und $2iK'$. Man beweist leicht, daß diese Funktion im fundamentalen Periodenparallelogramm nicht mehr als einen Unstetigkeitspunkt besitzen kann, und schließt daraus, daß sie konstant ist. Für $v = 0$ ergibt sich

$$f(v) = f(0) = \frac{-k \operatorname{sn} iw \operatorname{dn} iw}{-k^2 \operatorname{sn}^2 iw} \cdot \frac{\mp \operatorname{sn} iw}{\operatorname{dn} iw} = \mp \frac{1}{k}.$$

Hieraus folgt

$$\text{(4)} \qquad \frac{Y}{Z} = \mp \frac{1}{k} \frac{\operatorname{dn}(v \mp iw)}{\operatorname{sn}(v \mp iw)} = \mp \frac{\Theta(0)}{H_1(0)} \frac{\Theta_1(v \mp iw)}{H(v \mp iw)}.$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt mit Rücksicht auf die Schlußgleichung des vorigen Paragraphen:

$$(5) \qquad X = a_{11} + i a_{21} = - e^{imv} \frac{\Theta_1(0)\,\Theta(v \mp iw)}{\Theta_1(iw)\,\Theta(v)},$$

$$(6) \qquad Y = a_{12} + i a_{22} = - i e^{imv} \frac{\Theta(0)\,\Theta_1(v \mp iw)}{\Theta_1(iw)\,\Theta(v)}.$$

Wir stellen die Formeln, zu denen wir gekommen sind, übersichtlich zusammen.

Die Bezeichnung ist so gewählt, daß P_2 das mittlere Trägheitsmoment ist, und daß die beiden Größen $c^2 - hP_1$ und $c^2 - hP_2$ dasselbe Vorzeichen besitzen. Im Fall

$$\text{I.} \qquad P_1 < P_2 < P_3$$

sind sie positiv, im Fall

$$\text{II.} \qquad P_1 > P_2 > P_3$$

sind sie negativ. Im ersten Fall gelten die oberen, im zweiten die unteren Vorzeichen:

$$k = \sqrt{\frac{(P_2 - P_1)(hP_3 - c^2)}{(P_3 - P_2)(c^2 - hP_1)}} \qquad n = \sqrt{\frac{(P_3 - P_2)(c^2 - hP_1)}{P_1 P_2 P_3}}$$

$$\operatorname{sn} iw = \sqrt{\frac{P_1(P_3 - P_2)}{P_3(P_2 - P_1)}} \qquad 0 < w < K'$$

$$m = \frac{c}{nP_3} \mp \frac{\Theta'(iw)}{\Theta(iw)} \qquad v = n(t - t_0)$$

$$X = a_{11} + i a_{21} = - e^{imv} \frac{\Theta_1(0)\,\Theta(v \mp iw)}{\Theta_1(iw)\,\Theta(v)}$$

$$Y = a_{12} + i a_{22} = - i e^{imv} \frac{\Theta(0)\,\Theta_1(v \mp iw)}{\Theta_1(iw)\,\Theta(v)}$$

$$Z = a_{13} + i a_{23} = \pm i e^{imv} \frac{H_1(0)\,H(v \mp iw)}{\Theta_1(iw)\,\Theta(v)}$$

$$a_{31} = - ik \frac{\operatorname{sn} iw \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} iw} = - i \frac{H(iw)\,H_1(v)}{\Theta_1(iw)\,\Theta(v)}$$

$$a_{32} = \pm k \frac{\operatorname{cn} iw \operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} iw} = \pm \frac{H_1(iw)\,H(v)}{\Theta_1(iw)\,\Theta(v)}$$

$$a_{33} = \frac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{dn} iw} = \frac{\Theta(iw)\,\Theta_1(v)}{\Theta_1(iw)\,\Theta(v)}.$$

Die Drehungskomponenten haben die Werte

$$\alpha_1 = \frac{c}{P_1} a_{31} \qquad \alpha_2 = \frac{c}{P_2} a_{32} \qquad \alpha_3 = \frac{c}{P_3} a_{33}.$$

Während die Bewegung der Momentanachse der Drehung periodisch ist, ist die Bewegung des ganzen Körpers nicht periodisch. Man kann sie aber aus zwei periodischen Be-

wegungen, deren Perioden verschieden sind, zusammensetzen. Man übersieht dies am besten, wenn man neben dem im Raum festen Koordinatensystem xyz und dem mit dem Körper verbundenen Koordinatensystem $\xi\eta\zeta$ noch ein drittes Koordinatensystem $x_1 y_1 z_1$ einführt, das sowohl im Raum als auch im Körper beweglich ist. Wir definieren dasselbe durch die Gleichungen

$$x + iy = e^{imv}(x_1 + iy_1) \quad z = z_1 \tag{7}$$

und setzen

$$a_{1\lambda} + ia_{2\lambda} = e^{imv}(b_{1\lambda} + ib_{2\lambda}) \quad a_{3\lambda} = b_{3\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, 3). \tag{8}$$

Die neun Substitutionskoeffizienten $b_{\lambda\mu}$ sind periodische Funktionen der Variabeln v mit der gemeinschaftlichen Periode $4K$.

Aus den Gleichungen (1) des § 84 folgt mit Rücksicht auf (7) und (8)

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + iy_1 &= (b_{11} + ib_{21})\,\xi + (b_{12} + ib_{22})\,\eta + (b_{13} + ib_{23})\,\zeta \\ z_1 &= b_{31}\,\xi + b_{32}\,\eta + b_{33}\,\zeta. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Diese Gleichungen stellen eine periodische Bewegung mit der Periode $T = \frac{4K}{n}$ dar; die Gleichungen (7) stellen eine gleichförmige Drehung um die z-Achse mit der Periode $T_1 = \frac{2\pi}{m}$ dar. Die Bewegung des Körpers läßt sich demnach aus einer periodischen Bewegung in Beziehung auf das als im Raum fest gedachte Koordinatensystem $x_1 y_1 z_1$ und einer gleichförmigen Drehung dieses Koordinatensystems um die z-Achse zusammensetzen. Die Perioden der beiden Bewegungen sind im allgemeinen inkommensurabel.

Siebenter Abschnitt.

Sätze aus der Gruppentheorie.

In den zwei letzten Abschnitten werden wir uns mit der Theorie der Teilung und Transformation der elliptischen Funktionen und mit der Theorie der sogenannten „Modulfunktionen" beschäftigen. Man kann diese Theorien nicht übersichtlich darstellen, ohne wenigstens von den Grundbegriffen der Gruppentheorie Gebrauch zu machen. Wir wollen daher im folgenden diese Grundbegriffe kurz entwickeln.

§ 89. Die Permutationen von n Elementen. Substitutionen. Aus n gegebenen Elementen

$$x_1 x_2 \cdots x_n$$

können bekanntlich $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ verschiedene Permutationen gebildet werden. Wir wollen diese Zahl mit N, die verschiedenen Permutationen mit

$$P P_1 P_2 \cdots P_{N-1}$$

bezeichnen. Die Operation, durch die eine Permutation in eine andere übergeführt wird, bezeichnet man als „Substitution". Einer jeden der $N - 1$ Permutationen $P_1 P_2 \cdots P_{N-1}$ entspricht eine Substitution S_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, N-1)$, die die gegebene Permutation P in die Permutation P_λ überführt. Es ist üblich, eine Substitution S_λ, die die Elemente $x_1 x_2 \cdots x_n$ bzw. durch die Elemente $x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \cdots x_{\lambda_n}$ ersetzt durch die symbolische Gleichung

$$S_\lambda = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_{\lambda_1} & x_{\lambda_2} & \cdots & x_{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

zu charakterisieren.

Um auch der Anfangspermutation P eine Substitution zuzuordnen, fügen wir zu den $N - 1$ Substitutionen S_λ noch eine weitere S_0 hinzu und setzen fest, daß diese jedes Element an seinem Platz lassen soll. Diese Substitution nennt man die „identische" Substitution.

Führen wir zuerst die Substitution S_λ und dann die Substitution S_μ aus, so erhalten wir eine neue Substitution S_ν. Man deutet die Zusammensetzung der Substitution S_ν aus den beiden Substitutionen S_λ und S_μ durch die symbolische Gleichung

$$S_\nu = S_\lambda S_\mu$$

an und bezeichnet $S_\lambda S_\mu$ als „Substitutionenprodukt".

Für Substitutionenprodukte gilt offensichtlich das assoziative Gesetz:

$$(S_\lambda S_\mu) S_\varkappa = S_\lambda (S_\mu S_\varkappa).$$

Man kann daher die Klammern weglassen und das Produkt der drei Substitutionen durch $S_\lambda S_\mu S_\varkappa$ bezeichnen.

Dagegen gilt für Substitutionenprodukte im allgemeinen nicht das kommutative Gesetz: Die Reihenfolge, in der die Substitutionen auszuführen sind, darf im allgemeinen nicht geändert werden.

Betrachten wir beispielsweise die beiden Substitutionen

$$S_1 = \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ x_1 x_3 x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_2 = \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ x_2 x_1 x_3 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist

$$S_1 S_2 = \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ x_2 x_3 x_1 \end{pmatrix} \quad \text{dagegen ist} \quad S_2 S_1 = \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ x_3 x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Wenn zwischen zwei Substitutionen S_1, S_2 die Beziehung $S_1 S_2 = S_2 S_1$ stattfindet, so heißen die Substitutionen vertauschbar.

Zwei Substitutionen sind jedenfalls vertauschbar, wenn eine jede diejenigen Elemente auf ihrem Platz läßt, die von der anderen versetzt werden.

Eine Substitution, die nur zwei Elemente vertauscht, alle übrigen aber auf ihrem Platz läßt, bezeichnet man als Transposition. Jede Substitution läßt sich offenbar als Produkt von Transpositionen darstellen.

Wenn das Produkt zweier Substitutionen gleich der identischen Substitution ist, so nennt man sie zueinander invers. Die zur Substitution S inverse Substitution bezeichnet man mit S^{-1}, dementsprechend bezeichnet man die identische Substitution

$$S_0 = SS^{-1} \quad \text{mit} \quad 1.$$

Aus dem Begriff des Substitutionenproduktes ergibt sich ohne weiteres der Begriff der Potenz einer Substitution mit positivem ganzzahligem Exponenten; die wiederholte Anwendung der inversen Substitution führt zu Potenzen mit negativem ganzzahligem Exponenten.

In der Reihe der Potenzen einer Substitution S

$$S \; S^2 \; S^3 \cdots$$

kommt notwendig die identische Substitution vor. Da es nämlich nur N verschiedene Substitutionen gibt, so können diese Potenzen nicht alle untereinander verschieden sein. Nehmen wir an, es sei S^μ die erste in der Reihe der Potenzen, die einer der vorhergehenden gleich ist und zwar sei

$$S^\lambda = S^\mu \qquad (\lambda < \mu).$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$S^\lambda S^{-\lambda} = 1 = S^\mu S^{-\lambda} = S^{\mu-\lambda}.$$

Den Exponenten der niedersten Potenz der Substitution S, die mit der identischen Substitution zusammenfällt, bezeichnet man als „Ordnung" der Substitution S.

Der Exponent einer Potenz der Substitution S, die mit der identischen zusammenfällt, ist notwendig ein Multiplum der Ordnung r von S. Wäre nämlich $S^q = 1$ und $q = \varkappa r + \varrho$ $(0 < \varrho < r)$, so wäre wegen $S^r = 1$ auch $S^\varrho = 1$, also die Ordnung der Substitution S nicht $= r$ sondern $= \varrho$ entgegen unserer Voraussetzung.

Zu einem tieferen Einblick in die charakteristischen Eigenschaften einer Substitution führt die folgende Betrachtung.

Nehmen wir an, die Substitution S ersetze das Element x_1 durch x_2, x_2 durch x_3, x_3 durch $x_4 \cdots x_{k-1}$ durch x_k und x_k durch x_1. Sofern entweder $k = n$ ist, oder wenn $k < n$ ist, die Elemente $x_{k+1}\; x_{k+2} \cdots x_n$ auf ihrem Platz bleiben, so nennt

man S eine zyklische Substitution und bezeichnet sie durch das Symbol

$$S = (x_1 x_2 x_3 \cdots x_k).$$

Die zweite Potenz S^2 ersetzt x_1 durch x_3, x_2 durch $x_4, \cdots, x_{k-1}$ durch x_1. Die dritte Potenz S^3 ersetzt x_1 durch x_4, x_2 durch $x_5, \cdots, x_{k-2}$ durch x_1. Die k-te Potenz S^k läßt jedes Element an seinem Platz, ist also die identische Substitution.

Die Ordnung einer zyklischen Substitution ist also gleich der Anzahl der Elemente, die der Zyklus umfaßt.

Nehmen wir nun an, es sei $k < n$, und die Substitution S ersetze x_{k+1} durch x_{k+2}, x_{k+2} durch $x_{k+3} \cdots x_{k+h-1}$ durch x_{k+h}, x_{k+h} durch x_{k+1}. Es werde ferner x_{k+h+1} durch $x_{h+h+2}, \cdots, x_{k+h+i-1}$ durch x_{k+h+i} und x_{k+h+i} durch x_{k+h+1} ersetzt usw. Es ist einleuchtend, daß sich in diesem Fall die Substitution S als Produkt der zyklischen Substitutionen

$$C_1 = (x_1 x_2 \ldots x_k) \qquad C_2 = (x_{k+1} x_{k+2} \ldots x_{k+h})$$
$$C_3 = (x_{k+h+1} x_{k+h+2} \ldots x_{k+h+i}) \ldots$$

darstellen läßt. Eine jede dieser zyklischen Substitutionen läßt die Elemente auf ihrem Platz, die von einer der übrigen versetzt werden, daher sind diese Substitutionen untereinander vertauschbar. Daraus folgt, daß sich die λ-te Potenz der Substitution S in der Form

$$S^\lambda = C_1^\lambda C_2^\lambda C_3^\lambda \cdots$$

darstellen läßt.

Damit eine Potenz der Substitution S keines der Elemente $x_1 x_2 \cdots x_k$ versetzt, ist erforderlich und hinreichend, daß ihr Exponent durch k teilbar ist. Sollen auch die Elemente $x_{k+1} x_{k+2} \cdots x_h$ auf ihrem Platz bleiben, so muß der Exponent auch durch h teilbar sein usw. Daraus folgt:

Die Ordnung der Substitution S ist das kleinste gemeinschaftliche Multiplum der Ordnungen der zyklischen Substitutionen $C_1 C_2 C_3 \cdots$.

Wenn zwischen den Substitutionen S_1, S_2 und T die Beziehung

$$S_2 = T^{-1} S_1 T$$

besteht, so sagt man: Die Substitution S_1 wird durch T in S_2 transformiert. Aus der vorstehenden Gleichung folgt

$$S_1 = TS_2T^{-1}.$$

Es wird also S_2 durch T^{-1} in S_1 transformiert.

Die Substitutionen S_1 und S_2 bezeichnet man als ähnlich. Aus der Gleichung

$$S_2^2 = (T^{-1}S_1T)(T^{-1}S_1T)$$

folgt

$$S_2^2 = T^{-1}S_1^2T$$

und analog ergibt sich allgemein

$$S_2^\lambda = T^{-1}S_1^\lambda T.$$

Aus dieser Gleichung schließt man, daß ähnliche Substitutionen dieselbe Ordnung besitzen.

Man kann ferner leicht zeigen, daß ähnliche Substitutionen aus gleichviel Zyklen bestehen und daß entsprechende Zyklen gleichviel Elemente umfassen. Wir wollen hierauf nicht weiter eingehen.

§ 90. Gruppen von Substitutionen. Es sei ein System G von r Substitutionen

$$S_0 \; S_1 \; S_2 \cdots S_{r-1}$$

vorgelegt; das System habe die Eigenschaft, daß das Produkt aus zwei beliebigen Substitutionen des Systems ebenfalls dem System angehört. Unter dieser Voraussetzung bezeichnet man das System als „Gruppe"; die Anzahl r der verschiedenen Substitutionen wird als „Grad" der Gruppe bezeichnet.

Aus dem Begriff der Gruppe folgt, daß die sämtlichen Potenzen einer Substitution S_λ der Gruppe G ebenfalls der Gruppe angehören. Unter diesen Potenzen kommt auch die identische Substitution und die zu S_λ inverse Substitution vor. Jede Gruppe enthält also die identische Substitution und die zu einer Substitution der Gruppe inverse Substitution.

Im folgenden wählen wir die Indexbezeichnung stets so, daß der identischen Substitution der Index 0 entspricht.

Das einfachste Beispiel einer Gruppe bilden die r verschiedenen Potenzen einer Substitution r-ter Ordnung. Die

Gesamtheit aller N Substitutionen, die sich auf n Elemente beziehen, bildet ebenfalls eine Gruppe. Ein weiteres Beispiel bieten die Vertauschungen von vier Elementen, die ihr Doppelverhältnis ungeändert lassen. Diese Gruppe umfaßt die vier Substitutionen

$$S_0 = 1, \quad S_1 = (x_1 x_2)(x_3 x_4), \quad S_2 = (x_1 x_3)(x_2 x_4), \quad S_3 = (x_1 x_4)(x_2 x_3).$$

Die drei Substitutionen S_1, S_2, S_3 sind von der zweiten Ordnung; sie sind vertauschbar und es bestehen zwischen ihnen die Relationen

$$S_1 S_2 = S_3, \quad S_2 S_3 = S_1, \quad S_3 S_1 = S_2.$$

Wenn es unter den Substitutionen der Gruppe G wenigstens eine gibt, die ein gegebenes Element — etwa x_1 — durch ein beliebig zu wählendes Element ersetzt, so heißt die Gruppe transitiv; ist dies nicht der Fall, so heißt sie intransitiv.

Wenn die Substitution S_λ x_1 durch x_λ und die Substitution S_μ x_1 durch x_μ ersetzt, so läßt die Substitution $S_\lambda^{-1} S_\mu$ x_μ an Stelle von x_λ treten. In einer transitiven Gruppe gibt es daher mindestens eine Substitution, die ein beliebig zu wählendes Element durch ein anderes beliebig zu wählendes Element ersetzt.

Wenn die Gruppe G aus den Potenzen einer Substitution S besteht, so kann sie nur dann transitiv sein, wenn S eine zyklische Substitution n-ter Ordnung ist. Denn die Potenzen einer Substitution können nur die Elemente untereinander vertauschen, die demselben Zyklus angehören. Wir bezeichnen in diesem Fall G als zyklische Gruppe.

Wenn eine intransitive Gruppe vorgelegt ist, so können wir die Elemente $x_1 x_2 \ldots x_n$ derart in Systeme verteilen, daß durch die Substitutionen der Gruppe die Elemente eines jeden Systems untereinander vertauscht werden, daß aber kein Element eines Systems durch ein Element eines anderen Systems ersetzt wird.

Transformieren wir die sämtlichen Substitutionen S_λ der Gruppe G durch eine beliebige Substitution U, so erhalten wir ein neues System von Substitutionen

$$T_\lambda = U^{-1} S_\lambda U. \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

Diese Substitutionen bilden ebenfalls eine Gruppe r-ten Grades G'. Zunächst ist nämlich klar, daß verschiedenen Sub-

stitutionen S_λ und S_μ der Gruppe G verschiedene Substitutionen T_λ und T_μ der Gruppe G' entsprechen. Nehmen wir sodann an, zwischen den Substitutionen S_λ, S_μ, S_ν der Gruppe G bestehe die Relation $S_\lambda S_\mu = S_\nu$, so folgt sofort

$$U^{-1}S_\lambda S_\mu U = (U^{-1}S_\lambda U)(U^{-1}S_\mu U) = T_\lambda T_\mu = T_\nu.$$

Wir sagen in diesem Fall: die Gruppe G wird durch die Substitution U in die Gruppe G' transformiert und drücken diese Beziehung durch die symbolische Gleichung

$$G' = U^{-1}GU$$

aus.

Jeder Relation zwischen Substitutionen der Gruppe G entspricht eine analoge Relation zwischen den entsprechenden Substitutionen der Gruppe G'. Man bezeichnet deshalb die beiden Gruppen als isomorph. Vom Standpunkt der Gruppentheorie betrachtet sind isomorphe Gruppen als nicht wesentlich verschieden anzusehen.

§ 91. Untergruppen. Angenommen, eine Anzahl der Substitutionen der Gruppe G — etwa die Substitutionen

$$S_0 = 1 \quad S_1 \quad S_2 \ldots S_{\varrho-1} \tag{1}$$

bilden für sich eine Gruppe Γ vom Grade ϱ. Diese Gruppe Γ bezeichnet man als „Untergruppe" der Gruppe G.

Es sei T_1 eine Substitution der Gruppe G, die nicht der Untergruppe Γ angehört. Die ϱ Substitutionen

$$T_1, \quad S_1T_1, \quad S_2T_1 \ldots S_{\varrho-1}T_1 \tag{2}$$

sind alle untereinander verschieden. Wäre nämlich $S_\lambda T_1 = S_\mu T_1$, so müßte notwendig auch $S_\lambda = S_\mu$ sein. Die Substitutionen (2) sind aber auch von den Substitutionen (1) verschieden. Zum Beweis nehmen wir einen Augenblick an, es sei $S_\mu T_1 = S_\lambda$. Hieraus folgt $T_1 = S_\mu^{-1}S_\lambda$. Die Substitution T_1 gehört demnach ebenfalls der Gruppe Γ an, entgegen unserer Voraussetzung.

Sofern die Gruppe G außer den Substitutionen (1) und (2) noch weitere enthält, wählen wir aus diesen eine beliebige — T_2 — aus und bilden die Produkte

$$T_2 \quad S_1T_2 \quad S_2T_2 \ldots S_{\varrho-1}T_2. \tag{3}$$

Man beweist wie oben, daß diese Substitutionen unter sich und von den Substitutionen (1) verschieden sind. Um zu beweisen, daß sie auch von den Substitutionen (2) verschieden sind, nehmen wir an, es sei

$$S_\mu T_2 = S_\lambda T_1 .$$

Hieraus folgt

$$T_2 = S_\mu^{-1} S_\lambda T_1 .$$

Da die Substitution $S_\mu^{-1} S_\lambda$ der Untergruppe Γ angehört so gehört die Substitution $S_\mu^{-1} S_\lambda T_1$ zu den Substitutionen (2) entgegen unserer Voraussetzung.

Diese Schlußweise fortsetzend überzeugt man sich, daß der Grad ϱ der Untergruppe Γ ein Divisor des Grades r der Gruppe G ist. Es sei etwa $r = q\varrho$.

Wir ordnen nun die Substitutionen der Gruppe G in eine Tabelle von q Zeilen und ϱ Spalten.

$$(4) \qquad \begin{cases} 1 & S_1 & S_2 & \ldots S_{\varrho-1}, \\ T_1 & S_1 T_1 & S_2 T_1 & \ldots S_{\varrho-1} T_1, \\ T_2 & S_1 T_2 & S_2 T_2 & \ldots S_{\varrho-1} T_2, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ T_{q-1} & S_1 T_{q-1} & S_2 T_{q-1} & \ldots S_{\varrho-1} T_{q-1} . \end{cases}$$

Diese Tabelle enthält alle Substitutionen der Gruppe G und eine jede nur einmal.

Eine beliebige Gruppe kann als Untergruppe der Gruppe betrachtet werden, die alle N Substitutionen umfaßt. Daher ist der Grad einer beliebigen Gruppe ein Divisor der Zahl $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Der Grad einer Gruppe, die nicht alle Substitutionen umfaßt, ist daher höchstens $\frac{1}{2} N$. Eine Gruppe von diesem Grad gibt es in der Tat: sie besteht aus den Substitutionen, die sich als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen darstellen lassen. Man bezeichnet sie als „alternierende“ Gruppe. Wir werden im nächsten Paragraphen auf diese Gruppe zurückkommen.

Die Grade der Gruppen, die n Elemente umsetzen, die Ordnungen der Substitutionen, aus denen sie bestehen, und die Ordnungen der Zyklen, aus denen sich die einzelnen Substitu-

tionen zusammensetzen, unterliegen erheblichen Beschränkungen. Auf die interessanten, für die Theorie der algebraischen Gleichungen wichtigen Sätze, die hierüber bestehen, können wir nicht weiter eingehen.

Die Gesamtheit der Substitutionen, die zwei Gruppen G und H gemein haben, bilden, wie sich unmittelbar aus dem Gruppenbegriff ergibt, eine Gruppe Γ und diese Gruppe ist sowohl Untergruppe von G als auch von H. Analoges gilt für die Substitutionen, die mehreren Gruppen gemein sind.

Die Untergruppe Γ wird durch alle Substitutionen der Gruppe G, die in derselben Zeile der Tabelle (4) stehen, in dieselbe Gruppe transformiert (vgl. den vorigen Paragraphen). Es ist nämlich

$$(S_\lambda T_\mu)^{-1}\Gamma(S_\lambda T_\mu) = T_\mu^{-1}(S_\lambda^{-1}\Gamma S_\lambda)T_\mu.$$

Die Untergruppe Γ wird durch die ihr angehörende Substitution S_λ in sich selbst transformiert, folglich ist, wie zu zeigen war

$$(S_\lambda T_\mu)^{-1}\Gamma(S_\lambda T_\mu) = T_\mu^{-1}\Gamma T_\mu.$$

Indem wir die Untergruppe Γ durch alle Substitutionen der Gruppe G transformieren, erhalten wir also höchstens q verschiedene Gruppen

$$\Gamma \quad \Gamma_1 \quad \Gamma_2 \cdots \Gamma_{q-1}$$

die sämtlich Untergruppen der Gruppe G sind. Man bezeichnet sie als „gleichberechtigte" Untergruppen. Sind sie alle unter einander identisch, so nennt man die Gruppe Γ „ausgezeichnete" Untergruppe. Eine ausgezeichnete Untergruppe der Gruppe G wird also durch alle Substitutionen der Gruppe G in sich selbst transformiert. Eine Gruppe heißt „zusammengesetzt" oder „einfach", je nachdem sie eine ausgezeichnete Untergruppe besitzt oder nicht.

Beispielsweise ist die Gruppe, die aus den Potenzen einer Substitution S besteht, einfach oder zusammengesetzt, je nachdem die Ordnung r der Substitution S eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl ist.

In letzterem Falle bilden die Potenzen

$$1 \; S^\delta \; S^{2\delta} \; S^{3\delta} \ldots,$$

deren Exponenten durch einen Divisor δ von r teilbar sind, eine ausgezeichnete Untergruppe.

Eine ausgezeichnete Untergruppe Γ der Gruppe G ist auch ausgezeichnete Untergruppe jeder Untergruppe H von G, die alle Substitutionen von Γ umfaßt.

§ 92. Die Gruppe, die zu einer rationalen Funktion gehört. Wir betrachten nun die n Elemente $x_1 x_2 \cdots x_n$ als unabhängige Variable. Es sei φ eine bestimmte rationale Funktion dieser Variabeln.

Die Gesamtheit der Substitutionen, die die Funktion φ ungeändert lassen, bildet offenbar eine Gruppe G. Wir bezeichnen sie als die zur Funktion φ gehörige Gruppe.

Es ist wesentlich zu bemerken, daß bei dieser Definition die Elemente als unabhängig variabel vorausgesetzt werden; eine Substitution der Gruppe G darf also den Wert der Funktion φ nicht ändern, welche Werte auch immer den n Größen $x_1 x_2 \cdots x_n$ beigelegt werden mögen.

Eine symmetrische Funktion der Größen $x_1 x_2 \cdots x_n$ bleibt bei allen möglichen Vertauschungen dieser Größen ungeändert; die zugehörige Gruppe umfaßt also alle N Substitutionen.

Die Funktion

$$\Delta = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \cdot \\ \cdot (x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})$$

ändert ihr Vorzeichen, wenn zwei der Größen $x_1 x_2 \cdots x_n$ vertauscht werden. Sie bleibt daher bei Anwendung einer Substitution ungeändert oder ändert ihr Vorzeichen, je nachdem die Substitution aus einer geraden oder aus einer ungeraden Anzahl von Transpositionen zusammengesetzt werden kann. Die zur Funktion Δ gehörige Gruppe ist somit die alternierende (s. den vorigen Paragraphen).

Die Funktion $\varphi = x_1 x_2 + x_3 x_4$ bleibt bei Anwendung der folgenden acht Substitutionen ungeändert

$$\begin{array}{ll} S_0 = 1 & S_1 = (x_1 x_2)(x_3 x_4) \\ S_2 = (x_1 x_3)(x_2 x_4) & S_3 = (x_1 x_4)(x_2 x_3) \\ S_5 = (x_1 x_2) & S_6 = (x_3 x_4) \\ S_7 = (x_1 x_3 x_2 x_4) & S_8 = (x_1 x_4 x_2 x_3). \end{array}$$

Man verifiziert leicht, daß jede andere Substitution den Wert von φ ändert.

Es sei r der Grad der Gruppe G, die zu einer gegebenen Funktion φ gehört; mit

$$S_0 = 1 \quad S_1 \quad S_2 \cdots S_{r-1}$$

bezeichnen wir die verschiedenen Substitutionen der Gruppe; endlich sei $\frac{N}{r} = q$. Wie im vorigen Paragraphen gezeigt worden ist, können wir q Substitutionen

$$T_0 = 1 \quad T_1 \quad T_2 \cdots T_{q-1}$$

derart auswählen, daß sich eine jede Substitution in der Form

$$S_\lambda T_\mu \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots r-1; \ \mu = 0, 1, 2, \cdots q-1)$$

darstellen läßt (vgl. die Tabelle (4) des vorigen Paragraphen).

Da die Substitutionen S_λ die Funktion φ ungeändert lassen, so führen die sämtlichen Substitutionen

$$S_0 T_\mu \quad S_1 T_\mu \quad S_2 T_\mu \cdots S_{r-1} T_\mu$$

φ in denselben Wert φ_μ über, die Gesamtzahl der Werte, die die Funktion bei Anwendung aller Substitutionen annimmt, ist demnach q. Man bezeichnet deshalb φ als „q-wertige" Funktion.

Beispielsweise ist die oben angeführte Funktion

$$\varphi = x_1 x_2 + x_3 x_4$$

dreiwertig; es ist

$$\varphi_1 = x_1 x_3 + x_2 x_4 \quad \text{und} \quad \varphi_2 = x_1 x_4 + x_2 x_3.$$

Die transformierte Gruppe $G_\mu = T_\mu^{-1} G T_\mu$ läßt die Funktion φ_μ ungeändert. Denn T_μ^{-1} führt φ_μ in φ über, G läßt φ ungeändert und T_μ ersetzt φ wieder durch φ_μ. Zu den q Funktionen

$$\varphi \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \cdots \varphi_{q-1}$$

gehören demnach die gleichberechtigten Untergruppen

$$G \quad G_1 \quad G_2 \cdots G_{q-1}.$$

Sofern diese Untergruppen außer der identischen Substitution noch weitere Substitutionen gemein haben, so bilden diese eine Gruppe Γ.

Bezeichnen wir mit S_1 eine Substitution der Gruppe Γ, mit T eine beliebige Substitution. Auch die transformierte Substitution $S_2 = T^{-1} S_1 T$ gehört der Gruppe Γ an. Denn

die Substitution T^{-1} bewirkt eine gewisse Permutation der Funktionen $\varphi \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_{q-1}$, die Substitution S_1 läßt jede dieser Funktionen ungeändert und die Substitution T macht die durch T^{-1} bewirkte Permutation wieder rückgängig, folglich läßt auch die Substitution S_2 jede der Funktionen $\varphi \varphi_1 \varphi_2 \cdots$ ungeändert und sie gehört deshalb zur Gruppe Γ. Die Gruppe Γ ist also eine ausgezeichnete Untergruppe der alle N Substitutionen umfassenden Gesamtgruppe. Daraus folgt, daß die Gruppe Γ auch ausgezeichnete Untergruppe einer jeden der q Gruppen $G G_1 \cdots G_{q-1}$ ist (vgl. die Bemerkung am Schluß des vorigen Paragraphen).

§ 93. Die Funktionen, die zu einer gegebenen Gruppe gehören. Im vorausgehenden ist bewiesen worden, daß zu einer jeden rationalen Funktion φ der Größen $x_1 x_2 \cdots x_n$ eine bestimmte Gruppe G gehört, deren Substitutionen die Funktion φ ungeändert lassen. Umgekehrt gehört zu jeder gegebenen Gruppe G eine Klasse von rationalen Funktionen der Variabeln $x_1 x_2 \cdots x_n$.

Um dies zu beweisen, setzen wir, unter $u_1 u_2 \cdots u_n$ verfügbare Parameter verstehend,

$$y = u_1 x_1 + u_2 x_2 \cdots + u_n x_n .$$

Indem wir auf die lineare Funktion y alle von der identischen verschiedenen $N-1$ Substitutionen anwenden, erhalten wir $N-1$ weitere lineare Funktionen

$$y_1 \; y_2 \cdots y_{N-1} .$$

Wenn sowohl die n Größen $x_1 x_2 \cdots x_n$ als auch die Größen $u_1 u_2 \cdots u_n$ als unabhängig variabel betrachtet werden, so verschwindet keine der $\frac{1}{2} N(N-1)$ Differenzen $y_\nu - y_\mu$ $(\nu < \mu)$ identisch. Es ist aber wesentlich zu bemerken: auch wenn die Werte der n Größen $x_1 x_2 \cdots x_n$ festgelegt sind, können die Werte der n Größen $u_1 u_2 \cdots u_n$ so gewählt werden, daß keine der genannten Differenzen verschwindet, vorausgesetzt daß keine zwei der n Größen $x_1 x_2 \cdots x_n$ einander gleich sind.

Wir bezeichnen mit $y y_1 y_2 \cdots y_{r-1}$ die linearen Funktionen, in die y bei Anwendung der r Substitutionen der Gruppe G

übergeht, mit η einen verfügbaren Parameter und setzen

$$\varphi = (\eta - y)(\eta - y_1) \cdots (\eta - y_{r-1}).$$

Die Funktion φ wird durch die Substitutionen der Gruppe G nicht geändert, denn diese Substitutionen vertauschen nur die r Faktoren des Produkts. Dagegen ändert sich der Wert von φ, wenn eine nicht zur Gruppe G gehörige Substitution zur Anwendung kommt. Dies gilt auch noch in dem Fall, daß den n Größen $x_1 x_2 \cdots x_n$ bestimmte, untereinander verschiedene, numerische Werte beigelegt werden, vorausgesetzt, daß die Größen $u_1 u_2 \cdots u_n$ und η geeignet gewählt werden.

Damit ist bewiesen, daß es zur Gruppe G gehörige Funktionen gibt. Zwischen den Funktionen, die zur selben Gruppe gehören, besteht eine bemerkenswerte Beziehung.

Wir setzen

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(x) &= (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\ &= x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} \cdots + c_n \end{aligned}$$

und bezeichnen mit φ, ψ zwei zur Gruppe r-ten Grades G gehörende rationale Funktionen von $x_1 x_2 \cdots x_n$. Für diese Funktionen gilt der Satz:

Die Größe ψ läßt sich als ganze rationale Funktion der Größe φ darstellen; die Koeffizienten dieser ganzen Funktion sind rationale Funktionen der Größen $c_1 c_2 \cdots c_n$.

Zum Beweis bezeichnen wir mit

$$(2) \qquad \varphi \;\; \varphi_1 \;\; \varphi_2 \cdots \varphi_{q-1}$$

die $q = \frac{N}{r}$ Werte, die die Funktion φ bei Anwendung aller N Substitionen annimmt, mit

$$(3) \qquad \psi \;\; \psi_1 \;\; \psi_2 \cdots \psi_{q-1}$$

die entsprechenden Werte der Funktion ψ. Die Bezeichnung wählen wir so, daß eine Substitution, die φ in φ_λ überführt, auch ψ durch ψ_λ ersetzt.

Unter dieser Voraussetzung werden die Werte (2) und (3) durch jede Substitution in derselben Weise permutiert. Wir setzen nun

(4) $\Phi(z) = (z - \varphi)(z - \varphi_1)(z - \varphi_2) \cdots (z - \varphi_{q-1})$

und

(5) $$F(z) = \sum_{\lambda=0}^{q-1} \frac{\Phi(z)}{z - \varphi_\lambda} \frac{\psi_\lambda}{\Phi'(\varphi_\lambda)}.$$

$F(z)$ ist eine ganze Funktion $q-1$-ten Grades der Variabeln z; wir setzen

(6) $$F(z) = b_0 z^{q-1} + b_1 z^{q-2} \cdots + b_{q-1}.$$

Bei Anwendung einer beliebigen Substitution werden nur die Summanden auf der rechten Seite der Gleichung (5) untereinander vertauscht; die Summe bleibt ungeändert. Folglich sind die in (6) auftretenden Koeffizienten $b_0 b_1 \cdots b_{q-1}$ symmetrische Funktionen der Größen $x_1 x_2 \cdots x_n$, sie lassen sich daher rational durch die Größen $c_1 c_2 \cdots c_n$ ausdrücken.

Setzen wir in (5) und (6) $z = \varphi$, so ergibt sich

(7) $$\psi = b_0 \varphi^{q-1} + b_1 \varphi^{q-2} \cdots + b_{q-1}$$

w. z. b. w.

Wir wollen insbesondere hervorheben: Eine jede der oben eingeführten Größen $y_\nu (\nu = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$ läßt sich als rationale Funktion einer derselben derart darstellen, daß die Koeffizienten in den Größen $c_1 c_2 \cdots c_n$ rational sind.

Die Größen (2) sind Wurzeln einer Gleichung q-ten Grades (4)

(8) $$\Phi(z) = a_0 \varphi^q + a_1 \varphi^{q-1} \cdots + a_q = 0.$$

Die Koeffizienten dieser Gleichung sind symmetrische Funktionen der Größen (2), also auch symmetrische Funktionen der Größen $x_1 x_2 \cdots x_n$. Sie lassen sich daher rational durch die Größen $c_1 c_2 \cdots c_n$ ausdrücken.

Dementsprechend genügen auch die q Größen (3) einer Gleichung q-ten Grades

(9) $$\Psi(z) = 0,$$

deren Koeffizienten in den Größen $c_1 c_2 \cdots c_n$ rational sind.

Wenn die eine der beiden Gleichungen (8) und (9) aufgelöst ist, so erfordert die Auflösung der anderen nur mehr rationale Operationen.

Bei dem eben geführten Beweis ist zwar die Voraussetzung zur Geltung gekommen, daß die Größen (2) alle unter-

einander verschieden sind; in bezug auf die Größen (3) haben wir aber nur von der Voraussetzung Gebrauch gemacht, daß ψ bei der Anwendung der Substitutionen der Gruppe G ungeändert bleibt. Daß die Größen (3) alle untereinander verschieden sind, ist für unseren Beweis nicht erforderlich.

Wir können unseren Satz leicht noch etwas erweitern.

Es seien m rationale Funktionen der Größen $x_1 x_2 \cdots x_n$

$$\varphi \quad \varphi^{(1)} \quad \varphi^{(2)} \cdots \varphi^{(m-1)} \tag{10}$$

vorgelegt. Die Funktion φ sei q-wertig, $\varphi^{(1)}$ sei q_1-wertig $\cdots$ $\varphi^{(m-1)}$ sei q_{m-1}-wertig. Die verschiedenen Werte der Funktion $\varphi^{(\mu)}$ bezeichnen wir mit

$$\varphi^{(\mu)} \quad \varphi_1^{(\mu)} \cdots \varphi_{q_\mu-1}^{(\mu)} \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots, m-1). \tag{11}$$

Diese Werte sind Wurzeln einer Gleichung q-ten Grades

$$\begin{aligned}\Phi_\mu(z) &= (z_\mu - \varphi^{(\mu)})(z_\mu - \varphi_1^{(\mu)}) \cdots (z_\mu - \varphi^{\mu}_{q_\mu-1}) = \\ &= z_\mu^{q_\mu} + a_1^{(\mu)} z_\mu^{q_\mu-1} \cdots + a_{q_\mu}^{(\mu)} = 0\end{aligned} \tag{12}$$

deren Koeffizienten in den Größen $c_1 c_2 \cdots c_n$ rational sind.

Die Substitutionen, die alle m Funktionen (10) ungeändert lassen, bilden eine Gruppe G; ihr Grad sei r.

Es sei ψ eine rationale Funktion der Größen $x_1 x_2 \cdots x_n$, die durch keine Substitution der Gruppe G geändert wird. Eine nicht zur Gruppe G gehörige Substitution, die die Werte

$$\varphi \quad \varphi^{(1)} \quad \varphi^{(2)} \cdots \varphi^{(m-1)}$$

bzw. in die Werte

$$\varphi_\varkappa \quad \varphi_{\varkappa_1}^{(1)} \quad \varphi_{\varkappa_2}^{(2)} \cdots \varphi_{\varkappa_{m-1}}^{(m-1)}$$

überführt, führe die Funktion ψ in $\psi_{\varkappa \varkappa_1 \varkappa_2 \cdots \varkappa_{m-1}}$ über.

Die Bezeichnung $\psi_{000\ldots 0}$ bedeutet dasselbe wie ψ.

Wir bilden nun die Funktion

$$\left\{\begin{aligned}&F(z/z_1/z_2/\cdots/z_{m-1}) = \\ &= \sum_{\varkappa=0}^{q-1} \sum_{\varkappa_1=0}^{q_1-1} \cdots \sum_{\varkappa_{m-1}}^{q_{m-1}-1} \frac{\Phi(z)}{z-\varphi_\varkappa} \frac{1}{\Phi'(\varphi_\varkappa)} \frac{\Phi_1(z_1)}{z_1 - \varphi_{\varkappa_1}^{(1)}} \cdot \frac{1}{\Phi_1'(\varphi_{\varkappa_1}^{(1)})} \\ &\cdots \frac{\Phi_{m-1}(z_{m-1})}{z_{m-1} - \varphi_{\varkappa_{m-1}}^{(m-1)}} \frac{1}{\Phi'_{m-1}\left(\varphi_{\varkappa_{m-1}}^{(m-1)}\right)} \psi_{\varkappa \varkappa_1 \cdots \varkappa_{m-1}}.\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Die eben angewendete Schlußweise zeigt, daß F eine ganze rationale Funktion der Variabeln $z z_1 \cdots z_{m-1}$ ist, deren Koeffizienten sich rational durch die Größen $c_1 c_2 \cdots c_n$ ausdrücken lassen. Setzen wir

$$z = \varphi \qquad z_1 = \varphi^{(1)} \cdots z_{m-1} = \varphi^{(m-1)}$$

so folgt aus (13)

$$\psi = F(\varphi / \varphi^{(1)} / \cdots \varphi^{(m-1)}).$$

Unter der Voraussetzung, daß die Substitutionen, die eine jede der Funktionen

$$\varphi \quad \varphi^{(1)} \cdots \varphi^{(m-1)}$$

ungeändert lassen, auch den Wert der Funktion ψ nicht ändern, läßt sich demnach ψ als rationale Funktion dieser Größen darstellen.

Wenn es außer der identischen keine Substitution gibt, die alle m Funktionen (10) ungeändert läßt, so dürfen wir für ψ jede beliebige rationale Funktion der Wurzeln $x_1 x_2 \cdots x_n$ wählen; es läßt sich also insbesondere eine jede dieser Wurzeln rational durch die Größen (10) ausdrücken. Mit anderen Worten: Die Auflösung der Gleichung (1) läßt sich auf die Auflösung der m Hilfsgleichungen (12) zurückführen.

In dem besonderen Fall, daß $m = q$ und

$$\varphi^{(1)} = \varphi_1 \qquad \varphi^{(2)} = \varphi_2 \cdots \varphi^{(m-1)} = \varphi_{q-1}$$

ist, erhalten wir nur eine Hilfsgleichung, deren Lösung mit der Lösung der gegebenen Gleichung äquivalent ist.

Wir gehen nun dazu über, die im vorausgehenden entwickelten gruppentheoretischen Begriffe auf die Theorie der algebraischen Gleichungen anzuwenden.

§ 94. Rationalitätsbereich. Irreduzibilität. Wenn es sich um die Auflösung einer gegebenen algebraischen Gleichung handelt, so muß vor allem festgestellt werden, welche Größen als „bekannt“ oder als gegeben anzusehen sind. In erster Linie ist selbstverständlich die Gesamtheit der rationalen Zahlen als bekannt vorauszusetzen; sofern wir aber gewisse Hilfsgleichungen als aufgelöst betrachten, sind auch die Wurzeln dieser Gleichungen und die rationalen Funktionen derselben

als bekannt anzusehen. Es ist ferner der Fall vorzusehen, daß die Koeffizienten der vorgelegten Gleichung Funktionen von variabeln Parametern sind. In diesem Fall werden wir alle rationalen Funktionen dieser Parameter, deren Koeffizienten bekannt sind, ebenfalls als bekannt ansehen. Wenn wir gewisse Hilfsgleichungen, deren Koeffizienten ebenfalls rationale Funktionen der Parameter sind, als aufgelöst betrachten, so sind die Wurzeln derselben als bekannt anzusehen.

Wir wollen nun, der treffenden Terminologie Kroneckers folgend, den Inbegriff der als bekannt vorausgesetzten Größen als „Rationalitätsbereich" bezeichnen. Insbesondere bezeichnen wir den Inbegriff der rationalen Zahlen als „natürlichen Rationalitätsbereich". Wenn im Verlauf der Betrachtungen eine Hilfsgleichung aufgelöst wird, deren Koeffizienten dem gegebenen Rationalitätsbereich angehören, so wird der ursprüngliche Rationalitätsbereich durch „Adjunktion" der Wurzeln der Hilfsgleichung erweitert.

Aus dem Begriff des Rationalitätsbereiches ergibt sich unmittelbar der Begriff der Irreduzibilität.

Eine ganze rationale Funktion der Variabeln x, deren Koeffizienten einem gegebenen Rationalitätsbereich angehören, heißt reduzibel, wenn sie sich in zwei Faktoren $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ spalten läßt, die ebenfalls ganze Funktionen von x sind und deren Koeffizienten ebenfalls dem gegebenen Rationalitätsbereich angehören. Ist eine derartige Zerlegung unmöglich, so heißt die ganze Funktion irreduzibel.

Eine ganze Funktion $f(x)$, die in dem ursprünglichen Rationalitätsbereich irreduzibel ist, wird reduzibel, wenn der Rationalitätsbereich passend erweitert wird: Sie läßt sich in n lineare Faktoren spalten, wenn wir ihn durch Adjunktion der n Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ erweitern. Der Begriff der Reduzibilität und Irreduzibilität läßt sich ohne weiteres auf die algebraischen Gleichungen übertragen.

Bekanntlich läßt sich der größte gemeinschaftliche Teiler von zwei ganzen rationalen Funktionen durch rationale Operationen bestimmen. Folglich genügen die gemeinsamen Wurzeln zweier Gleichungen

$$f(x)=0 \quad \text{und} \quad F(x)=0$$

einer Gleichung $g(x) = 0$, deren Koeffizienten demselben Rationalitätsbereich angehören, wie die Koeffizienten von $f(x)$ und $F(x)$.

Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ irreduzibel ist, so muß daher die ganze Funktion $g(x)$ bis auf einen von x unabhängigen Faktor mit $f(x)$ identisch sein, d. h. die ganze Funktion $F(x)$ ist durch $f(x)$ teilbar. Mit anderen Worten: Hat eine Gleichung mit einer irreduzibeln Gleichung eine Wurzel gemein, so genügen ihr alle Wurzeln der letzteren.

Eine irreduzible Gleichung $f(x) = 0$ kann keine Doppelwurzel besitzen, denn sonst hätte die ganze Funktion $f(x)$ mit ihrer Derivierten $f'(x)$ einen Faktor gemein.

Im folgenden beschäftigen wir uns nur mit irreduzibeln Gleichungen.

§ 95. Gruppe einer Gleichung. Es sei eine irreduzible algebraische Gleichung

$$(1) \qquad f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} \cdots + c_n = 0$$

vorgelegt, deren Koeffizienten einem gegebenen Rationalitätsbereich angehören. Jede symmetrische Funktion der Wurzeln läßt sich rational durch die Koeffizienten $c_1 c_2 \cdots c_n$ ausdrücken, ist also sicher eine rationale Größe. Es kann aber der Fall eintreten, daß noch weitere rationale Funktionen der Wurzeln, die nicht symmetrisch sind, dem Rationalitätsbereich angehören. Die Gesamtheit der Substitutionen, die diese Funktionen ungeändert lassen, bildet eine Gruppe G; man bezeichnet sie nach Galois Vorgang als Gruppe der Gleichung.

Wenn die Koeffizienten $c_1 c_2 \cdots c_n$ der gegebenen Gleichung als verfügbare Parameter betrachtet werden, so bilden die rationalen Funktionen dieser Koeffizienten den Rationalitätsbereich, von dem wir auszugehen haben. Die Gruppe der Gleichung besteht in diesem Fall aus der Gesamtheit der N Substitutionen. Ein Beispiel einer Gleichungsgruppe, deren Grad unter der Maximalzahl liegt, bietet die Gruppe der Gleichung

$$x^{2n} + c_1 x^{2n-1} + c_2 x^{2n-2} \dots + c_n x^n + c_n x^{n-1} \dots \\ + c_2 x^2 + c_1 x + 1 = 0$$

deren Wurzeln paarweise reziproke Werte besitzen. Wir können in diesem Fall die Bezeichnung so wählen, daß

$$x_{\nu+1} x_{2n-\nu} = 1 \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \dots n-1.$$

Es sind dann die n Funktionen

$$\varphi^{(\nu)} = x_{\nu+1} x_{2n-\nu} - 1 \quad \nu = 0, 1, 2, \dots n-1$$

bekannt. Von den $(2n)!$ möglichen Vertauschungen der Wurzeln sind nur die in Betracht zu ziehen, die die Werte dieser n Funktionen ungeändert lassen. Es dürfen also zwar die Wurzeln $x_1 x_2 \dots x_n$ beliebig permutiert werden, aber jeder Permutation dieser Wurzeln entspricht eine ganz bestimmte Permutation der Wurzeln $x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}$. Die Gruppe der Gleichung umfaßt daher nicht $(2n)!$, sondern nur $n!$ Substitutionen.

Eine Gleichung, deren Gruppe intransitiv ist, ist reduzibel (S. 303). Zum Beweis nehmen wir an, daß die Substitutionen der Gruppe die Wurzeln

$$x_1 x_2 \dots x_k \tag{2}$$

untereinander vertauschen, aber keine derselben durch eine der übrigen $n-k$ Wurzeln ersetzen. Unter dieser Voraussetzung gehört jede symmetrische Funktion der k Wurzeln (2) dem Rationalitätsbereich an, folglich sind die Koeffizienten der ganzen Funktion

$$\psi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k) \tag{3}$$

rational.

Der eben bewiesene Satz ist umkehrbar:

Die Gruppe einer reduzibeln Gleichung ist intransitiv.

Nehmen wir an, das Gleichungspolynom $f(x)$ sei durch die ganze Funktion $\psi(x)$ (3) teilbar, deren Koeffizienten dem gegebenen Rationalitätsbereich angehören. Damit eine Substitution die Größe $\psi(x)$ bei beliebiger Wahl des Wertes x ungeändert läßt, ist erforderlich, daß sie die k Größen (2) nur untereinander vertauscht. Daraus folgt aber, daß die Gruppe der Gleichung intransitiv ist.

Aus dem eben Bewiesenen schließen wir:

Die Gruppe einer irreduzibeln Gleichung ist transitiv und umgekehrt ist eine Gleichung irreduzibel, wenn ihre Gruppe transitiv ist.

Wenn eine Hilfsgleichung dieselbe Gruppe besitzt wie die Grundgleichung, so zieht ihre Auflösung die der Grundgleichung nach sich (S. 313) und umgekehrt; es handelt sich also um äquivalente Probleme. Ob die beiden Gleichungen denselben Grad haben oder nicht, kommt dabei nicht in Betracht.

Eine Vereinfachung des Problems tritt nur dann ein, wenn es gelingt, die Auflösung der vorgelegten Gleichung auf die Auflösung von Hilfsgleichungen zurückzuführen, deren Gruppen von niedrigerem Grade sind.

Dies ist nur dann möglich, wenn die Gruppe der vorgelegten Gleichung zusammengesetzt ist, also eine ausgezeichnete Untergruppe besitzt (S. 306).

Nehmen wir, um dies zu beweisen an, die Gruppe G der vorgelegten Gleichung besitze eine ausgezeichnete Untergruppe Γ; der Grad von G sei r, der von Γ sei $\varrho = \frac{r}{q}$. Wir bezeichnen die Substitutionen der Untergruppe Γ mit

$$S_0 = 1, \quad S_1 \quad S_2 \ldots S_{\varrho-1}$$

und ordnen die Substitutionen der Gruppe G, wie dies im § 91 geschehen ist, in eine Tabelle mit q Zeilen und ϱ Spalten.

$$\begin{array}{lllll}
S_0 & S_1 & S_2 & \cdots & S_{\varrho-1} \\
S_0 T_1 & S_1 T_1 & S_2 T_1 & \cdots & S_{\varrho-1} T_1 \\
S_0 T_2 & S_1 T_2 & S_2 T_2 & \cdots & S_{\varrho-1} T_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
S_0 T_{q-1} & S_1 T_{q-1} & S_2 T_{q-1} & \cdots & S_{\varrho-1} T_{q-1}.
\end{array}$$

Es sei φ eine rationale Funktion der Wurzeln $x_1 x_2 \ldots x_n$, die zur Gruppe Γ gehört. Alle Substitutionen der ersten Zeile unserer Tabelle lassen die Funktion φ ungeändert, alle Substitutionen der zweiten Zeile führen sie in dieselbe Funktion φ_1 über; alle Substitutionen der dritten Zeile führen sie in φ_2 über, alle Substitutionen der letzten Zeile führen sie in φ_{q-1} über. Weil nach Voraussetzung Γ eine ausgezeichnete Unter-

gruppe ist, so bleibt bei Anwendung der Substitutionen dieser Untergruppe nicht nur die Funktion φ, sondern auch eine jede der Funktionen $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_{q-1}$ ungeändert (S. 308). Daraus folgt:

Alle in der λ-ten Zeile unserer Tabelle stehenden Substitutionen der Gruppe G permutieren die Funktionen $\varphi \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_{q-1}$ in derselben Weise, nämlich ebenso wie die Substitution T_λ. Da sonach nur q Permutationen dieser Größen in Betracht kommen, so besitzt die Gruppe der Gleichung q-ten Grades, deren Wurzeln diese Größen sind, den Grad $q = \frac{r}{\varrho}$. Nach Auflösung dieser Hilfsgleichung wird der ursprüngliche Rationalitätsbereich durch Adjunktion der Größe φ erweitert und in diesem erweiterten Rationalitätsbereich ist Γ die Gruppe der Grundgleichung. Die Auflösung der Grundgleichung ist also auf ein einfacheres Problem zurückgeführt.

Die Gruppe der Hilfsgleichung ist transitiv, denn den Substitutionen der Gruppe G, die den Wert φ in φ_λ überführen, entsprechen auf die Größen $\varphi \varphi_1 \ldots \varphi_{q-1}$ bezügliche Substitutionen, die die Wurzel φ durch die beliebig zu wählende Wurzel φ_λ ersetzen. Die Hilfsgleichung ist demnach irreduzibel.

Zwischen der Gruppe G der vorgelegten Gleichung und der Gruppe H der Hilfsgleichung besteht eine bemerkenswerte Beziehung: jeder Substitution der Gruppe G entspricht eine bestimmte Substitution der Gruppe H, die dieselbe Permutation der Größen $\varphi \varphi_1 \ldots \varphi_{q-1}$ bewirkt, aber einer bestimmten Substitution der Gruppe H entsprechen ϱ Substitutionen der Gruppe G; sie bilden eine Zeile unserer Tabelle. Insbesondere entspricht der identischen Substitution der Gruppe H die ausgezeichnete Untergruppe Γ von G.

Man bezeichnet auch diese Beziehung als Isomorphismus und zwar als „meriedrischen“ Isomorphismus. Die in § 91 besprochene, wechselseitig eindeutige Beziehung zwischen zwei Gruppen bezeichnet man zum Unterschied als „holoedrischen“ Isomorphismus. Wenn von Isomorphismus ohne weiteres die Rede ist, ist immer der holoedrische gemeint.

Nehmen wir nunmehr an, die Gruppe G der vorgelegten Gleichung sei einfach. Es sei $\Phi(z) = 0$ eine Hilfsgleichung

q-ten Grades, deren Wurzeln $\varphi \varphi_1 \ldots \varphi_{q-1}$ rationale Funktionen der Wurzeln der Grundgleichung sind. In diesem Fall gibt es außer der identischen keine Substitution, die diese q Funktionen ungeändert läßt, denn wenn derartige Substitutionen existieren würden, so müßten sie eine ausgezeichnete Untergruppe bilden. Daraus folgt: zwei verschiedene Substitutionen S_1, S_2 der Gruppe G bewirken verschiedene Permutationen der Größen $\varphi \varphi_1 \ldots \varphi_{q-1}$. Würden sie nämlich dieselbe Permutation hervorrufen, so ließe die Substitution $S_1 S_2^{-1}$ eine jede dieser Größen ungeändert. Die Anzahl der in Betracht zu ziehenden Permutationen der Größen $\varphi \varphi_1 \ldots \varphi_{q-1}$ ist daher ebenso groß als die Anzahl der durch die Gruppe G bewirkten Permutationen der Größen $x_1 x_2 \ldots x_n$; mit anderen Worten: die Gruppe der Gleichung $\Phi(z) = 0$ ist vom selben Grade wie die Gruppe G der Grundgleichung; sie ist mit ihr holoedrisch isomorph.

Die Gruppe, die aus sämtlichen Permutationen von n Elementen besteht, besitzt auf jeden Fall eine ausgezeichnete Untergruppe vom Grade $\frac{1}{2}n!$, die alternierende Gruppe (vgl. § 91). Diese letztere aber ist, vom Fall $n = 4$ abgesehen, einfach. Daher läßt sich die Auflösung einer „allgemeinen“ Gleichung*) von höherem als dem vierten Grad nicht auf die Auflösung von Hilfsgleichungen zurückführen, deren Gruppe von niedrigerem als dem $\frac{1}{2}n!$-ten Grade ist. Auf den Beweis dieses Satzes können wir hier nicht eingehen.

§ 96. Die Galoissche Resolvente. Um die Ausführungen des vorigen Paragraphen anschaulicher zu machen, kehren wir zu den im Anfang des § 93 angestellten Betrachtungen zurück. Wir haben dort N Größen $y y_1 \ldots y_{N-1}$ eingeführt und zwar ist

$$(1) \qquad y = u_1 x_1 + u_2 x_2 \cdots + u_n x_n .$$

Die übrigen $N - 1$ Größen y_ν gehen aus y durch Permutation der n Größen $x_1 x_2 \ldots x_n$ hervor. Bei geeigneter Wahl der Parameter $u_1 u_2 \ldots u_n$ sind die N Größen $y y_1 \ldots y_{N-1}$ alle

*) d. h. einer Gleichung, deren Koeffizienten als verfügbare Parameter betrachtet werden.

untereinander verschieden, vorausgesetzt, daß unter den n Größen $x_1 x_2 \ldots x_n$ keine zwei gleichen vorkommen. Dieser Fall kann aber nicht eintreten, weil sonst die Grundgleichung reduzibel wäre, was wir ausgeschlossen haben (vgl. § 94 Schluß).

Die n Größen $y y_1 \ldots y_{N-1}$ genügen einer Gleichung N-ten Grades

$$R(\eta) = (\eta - y)(\eta - y_1) \cdots (\eta - y_{N-1}) = 0. \tag{2}$$

Die Koeffizienten dieser Gleichung sind ganze rationale Funktionen der Parameter $u_1 u_2 \ldots u_n$ und sie sind rational in den Koeffizienten $c_1 c_2 \ldots c_n$ der Grundgleichung.

Auch wenn die Grundgleichung irreduzibel ist, kann die Gleichung (2) reduzibel sein. Es sei

$$P(\eta) = (\eta - y)(\eta - y_1) \cdots (\eta - y_{r-1}) = \eta^r + a_1 \eta^{r-1} \cdots + a_r \tag{3}$$

ein irreduzibler Faktor von $R(\eta)$.

Die Koeffizienten $a_1 a_2 \ldots a_r$ sind ganze rationale Funktionen der Parameter $u_1 u_2 \ldots u_n$ und die Koeffizienten dieser ganzen Funktionen gehören dem gegebenen Rationalitätsbereich an. Diejenigen Permutationen der Größen $x_1 x_2 \ldots x_n$, die die Koeffizienten $a_1 a_2 \ldots a_r$ ungeändert lassen, bilden die Gruppe der Grundgleichung.

Die Gleichung $R(\eta) = 0$ bezeichnet man als „Galoissche Resolvente“ der gegebenen Gleichung. Die Galoissche Resolvente ist zwar — allgemein zu reden — von höherem Grade als die Grundgleichung, aber ihre Gruppe ist mit der Gruppe der Grundgleichung holoedrisch isomorph und daher bietet die Auflösung der Resolvente keine größeren Schwierigkeiten als die der Grundgleichung. Die Galoissche Resolvente hat die charakteristische Eigenschaft, daß sich alle ihre Wurzeln rational durch eine derselben ausdrücken lassen (S. 311).

Man überträgt die Bezeichnung Galoissche Resolvente auf alle Gleichungen, die diese charakteristische Eigenschaft besitzen.

Nehmen wir an, die Gruppe G der vorgelegten Gleichung besitze eine ausgezeichnete Untergruppe Γ vom Grade $\varrho = \frac{r}{q}$. Wir bezeichnen mit z eine Funktion, die zu dieser Untergruppe Γ gehört, mit $z_1, z_2 \cdots z_{q-1}$ die konjugierten Werte, in

die z durch die Substitutionen der Gruppe G übergeführt wird. Diese Größen sind Wurzeln einer Galoisschen Resolvente

$$P(\zeta) = (\zeta - z)(\zeta - z_1) \cdots (\zeta - z_{q-1}) = 0.$$

Wird eine Wurzel z derselben dem gegebenen Rationalitätsbereich adjungiert, so wird die Resolvente $R(\eta)$ reduzibel: sie zerfällt in q irreduzible Faktoren ϱ-ten Grades.

Nehmen wir umgekehrt an, die Resolvente $R(\eta)$, die im ursprünglichen Rationalitätsbereich irreduzibel ist, werde reduzibel, wenn dieser Bereich durch Adjunktion der Wurzel einer Hilfsgleichung erweitert wird. Die Faktoren, in die das Polynom $R(\eta)$ zerfällt, sind alle von gleichem Grade. Denn weil alle Wurzeln der Resolvente sich als rationale Funktionen einer derselben darstellen lassen, können wir die Wurzeln eines Faktors von $R(\eta)$ denen eines anderen Faktors eindeutig zuordnen. Die Faktoren von $R(\eta)$ sind in den Größen $x_1 x_2 \ldots x_n$ rational, es sind daher auch die Koeffizienten der Faktoren in diesen Größen rational. Um die Zerfällung von $R(\eta)$ ausführen zu können, brauchen wir demnach nur gewisse rationale Funktionen der Wurzeln zu kennen. Wir bedürfen daher nur solcher Hilfsgleichungen, deren Wurzeln rationale Funktionen der Wurzeln der Grundgleichung sind, die Adjunktion irrationaler Funktionen der Wurzeln ist unnötig.

Wir können die Galoissche Resolvente benutzen, um eine begriffliche Schwierigkeit zu beseitigen, die unseren bisherigen Betrachtungen anhaftet. Solange wir die Wurzeln der Grundgleichung als variabel betrachten, hat es nichts anstößiges von einer Permutation dieser Größen zu sprechen; wenn aber die Koeffizienten der Grundgleichung numerisch fixiert sind, so haben auch die Wurzeln feste Zahlwerte und es ist nicht ohne weiteres klar, was unter einer Vertauschung dieser Zahlwerte zu verstehen ist. Betrachten wir zunächst die Größen $x_1 x_2 \ldots x_n$ und $u_1 u_2 \ldots u_n$ als unabhängig variabel. Jeder Permutation der Größen $x_1 x_2 \ldots x_n$, die den Ausdruck

$$y = u_1 x_1 + u_2 x_2 \cdots + u_n x_n$$

in

$$y_\nu = u_1 x_{\nu_1} + u_2 x_{\nu_2} \cdots + u_n x_{\nu_n}$$

überführt, entspricht eine komplementäre Permutation der

Größen $u_1 u_2 \ldots u_n$, die dieselbe Wirkung hat. Es steht nun nichts im Weg, wenn die Werte der Größen $x_1 x_2 \ldots x_n$ numerisch fixiert sind, nach wie vor die Parameter $u_1 u_2 \ldots u_n$ als unabhängig variabel zu betrachten. Man kann dann die Substitutionen, die sich auf die Größen $x_1 x_2 \ldots x_n$ beziehen, mittelst der komplementären auf die Größen $u_1 u_2 \ldots u_n$ bezüglichen Substitutionen definieren.

Der Begriff der Galoisschen Resolvente ist im höchsten Maß geeignet, die gruppentheoretischen Begriffe anschaulich zu machen. Die wirkliche Berechnung dieser Resolventen führt schon in sehr einfachen Fällen zu kaum zu übersehenden Resultaten.

§ 97. Über Gleichungen, deren Gruppe zyklisch ist.

Unter allen Gruppen sind die zyklischen, die aus den Potenzen einer einzigen Substitution bestehen, die einfachsten. Die Auflösung einer Gleichung, deren Gruppe zyklisch ist, läßt sich immer auf die Auflösung einer binomischen Gleichung zurückführen.

Nehmen wir an, die Gruppe der vorgelegten Gleichung n-ten Grades

$$f(x) = 0$$

sei zyklisch; sie bestehe aus den Potenzen der Substitution (vgl. § 89)

$$S = (x_1 x_2 \ldots x_n). \tag{1}$$

Wir erweitern den gegebenen Rationalitätsbereich durch Adjunktion einer primitiven n-ten Einheitswurzel ε*) und setzen

$$y = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 \cdots + \varepsilon^{n-1} x_n. \tag{2}$$

Bei Anwendung der Substitution $S(1)$ geht y in

$$x_2 + \varepsilon x_3 + \varepsilon^2 x_4 \cdots + \varepsilon^{n-1} x_1 = \frac{1}{\varepsilon} y$$

über. Folglich bleibt die n-te Potenz

$$y^n = A \tag{3}$$

*) Unter einer primitiven n-ten Einheitswurzel versteht man bekanntlich eine Wurzel der Gleichung $x^n = 1$, die nicht einer zweiten Gleichung $x^m = 1$ von niedrigerem Grade genügt.

ungeändert; die Größe A gehört also dem Rationalitätsbereich an. Wir setzen ferner, unter λ eine der Zahlen $2, 3, \ldots, n-1$ verstehend,

$$y_\lambda = x_1 + \varepsilon^\lambda x_2 + \varepsilon^{2\lambda} x_3 \cdots + \varepsilon^{(n-1)\lambda} x_n. \tag{4}$$

Die Substitution S führt y_λ in $\frac{y_\lambda}{\varepsilon^\lambda}$ über, sie läßt demnach den Quotienten

$$\frac{y_\lambda}{y^\lambda} = B_\lambda \tag{5}$$

ungeändert; folglich gehört auch die Größe B_λ dem Rationalitätsbereich an. Endlich ist die Summe der n Wurzeln $x_1 x_2 \ldots x_n$ eine rationale Größe C. Wir erhalten somit zur Bestimmung der Wurzeln die n linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \cdots + x_n &= C \\ x_1 + \varepsilon x_2 \cdots + \varepsilon^{n-1} x_n &= y \qquad (2) \\ x_1 + \varepsilon^\lambda x_2 \cdots + \varepsilon^{(n-1)\lambda} x_n &= B_\lambda y^\lambda \\ \text{für } \lambda = 2, 3, \cdots, n-1 & \qquad (4) \text{ u. } (5). \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste dieser Gleichungen mit 1, die zweite mit $\varepsilon^{-\mu}$, die dritte mit $\varepsilon^{-2\mu}$ usw., wo μ eine beliebige Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ bedeutet, und addieren dann. Der Koeffizient von $x_{\nu+1}$ in der Schlußgleichung ist

$$1 + \varepsilon^{\nu-\mu} + \varepsilon^{2(\nu-\mu)} \ldots + \varepsilon^{(n-1)(\nu-\mu)} = \frac{\varepsilon^{n(\nu-\mu)} - 1}{\varepsilon^{\nu-\mu} - 1},$$

also $= n$ für $\nu = \mu$ und $= 0$ für $\nu \neq \mu$. Wir erhalten somi

$$n x_{\mu+1} = C + \varepsilon^{-\mu} y + \varepsilon^{-2\mu} B_2 y^2 \cdots + \varepsilon^{-(n-1)\mu} B_{n-1} y^{n-1} \tag{6}$$
$$(\mu = 0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

Damit sind die Wurzeln der vorgelegten Gleichung rational durch die Wurzel y der binomischen Gleichung (3) ausgedrückt.

Die Auflösung der allgemeinen Gleichungen dritten und vierten Grades läßt sich auf die Auflösung von Hilfsgleichungen zurückführen, die eine zyklische Gruppe besitzen. Daher lassen sich diese Gleichungen mittelst binomischer Hilfsgleichungen — durch Ausziehen von Wurzeln — lösen.

Um dies zunächst für die Gleichung dritten Grades nachzuweisen, bemerken wir, daß die zur alternierenden Gruppe gehörige Funktion

$$\Delta = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

durch Ausziehen einer Quadratwurzel bestimmt werden kann. Erweitern wir den ursprünglichen Rationalitätsbereich, der die rationalen Funktionen der Koeffizienten der gegebenen Gleichung umfaßt, durch Adjunktion der Irrationalität Δ, so besteht die Gruppe der Gleichung aus den Potenzen der Substitution $(x_1 x_2 x_3)$, sie ist also zyklisch. Wir setzen, unter ε eine primitive dritte Einheitswurzel verstehend

$$y = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 \qquad y^3 = A.$$

Man verifiziert leicht durch eine einfache Rechnung, daß sich die Größe A rational durch Δ und die Koeffizienten der Grundgleichung ausdrücken läßt.

Die Gruppe der allgemeinen Gleichung vierten Grades besitzt eine ausgezeichnete Untergruppe Γ vom vierten Grade; sie besteht aus den Substitutionen (vgl. S. 303)

$$(7) \quad S_0 = 1 \quad S_1 = (x_1 x_2)(x_3 x_4) \quad S_2 = (x_1 x_3)(x_2 x_4) \quad S_3 = (x_1 x_4)(x_2 x_3).$$

Die Substitutionen der Gruppe Γ lassen eine jede der drei Funktionen

$$(8) \quad \varphi = x_1 x_2 + x_3 x_4 \quad \varphi_1 = x_1 x_3 + x_2 x_4 \quad \varphi_2 = x_1 x_4 + x_2 x_3$$

ungeändert. Die Koeffizienten der Gleichung dritten Grades, deren Wurzeln diese drei Funktionen sind, haben wir im § 5 berechnet. Nach Adjunktion der drei irrationalen Größen $\varphi \varphi_1 \varphi_2$ reduziert sich die Gruppe der vorgelegten Gleichung auf die Gruppe Γ.

Die Substitutionen $S_0 = 1$ und S_1 (7) bilden eine ausgezeichnete Untergruppe der Gruppe Γ. Die Substitution S_1 läßt die Funktion

$$\psi = x_1 x_2 - x_3 x_4$$

ungeändert; das Quadrat dieser Funktion gehört zur Gruppe Γ. In der Tat ist

$$(9) \qquad \psi^2 = \varphi^2 - 4 x_1 x_2 x_3 x_4. \qquad (8)$$

Der zweite Term rechts ist eine symmetrische Funktion der Wurzeln.

Ist ψ durch Ausziehen einer Quadratwurzel bestimmt, so sind auch die Größen

$$x_1 x_2 = \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) \quad \text{und} \quad x_3 x_4 = \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)$$

bekannt und mit Hilfe der symmetrischen Funktionen

$$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) \quad \text{und} \quad (x_1 + x_2) x_3 x_4 + (x_3 + x_4) x_1 x_2$$

lassen sich auch die Summen $x_1 + x_2$ und $x_3 + x_4$ bestimmen. Das Quadrat

$$\chi^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4 x_1 x_2$$

läßt sich nun ebenfalls rational durch φ und ψ ausdrücken und durch Ausziehen einer weiteren Quadratwurzel ergibt sich die Differenz

$$\chi = x_1 - x_2 .$$

Die Wurzeln x_1 und x_2 ergeben sich nun unmittelbar als rationale Funktionen von φ, ψ und χ. Die Wurzeln x_3 und x_4 sind dann durch die linearen Gleichungen

$$\varphi_1 = x_1 x_3 + x_2 x_4 \quad \varphi_2 = x_1 x_4 + x_2 x_3$$

bestimmt.

§ 98. Abelsche Gleichungen. Eine Gruppe, deren Substitutionen vertauschbar sind, bezeichnet man als „Abelsche“ Gruppe; eine Gleichung, deren Gruppe eine Abelsche ist, wird als Abelsche Gleichung bezeichnet.

Die Auflösung einer Abelschen Gleichung läßt sich auf die Auflösung von binomischen Gleichungen zurückführen.

Wir bezeichnen die vorgelegte Abelsche Gruppe mit G, ihren Grad mit r, mit S_1 eine beliebige ihrer Substitutionen, mit α_1 die Ordnung derselben. Wenn $\alpha_1 = r$ ist, so ist die Gruppe G zyklisch, also gilt in diesem Fall unser Satz (siehe den vorigen Paragraphen); ist dies nicht der Fall, so bilden die Potenzen

$$(1) \qquad 1 \quad S_1 \quad S_1^2 \ldots \quad S_1^{\alpha_1 - 1}$$

eine Untergruppe Γ_1 der Gruppe G. Wir wählen nun unter den Substitutionen der Gruppe G, die nicht zu den Potenzen (1) gehören, eine beliebige S_2 aus. Ihre Ordnung sei α_2. Die Substitutionen

(2) $S_1^\lambda S_2^\mu \quad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots, \alpha_1 - 1;\ \mu = 0, 1, 2, \cdots, \alpha_2 - 1)$

bilden eine Gruppe Γ_2, denn weil die Substitutionen S_1 und S_2 vertauschbar sind, so ist

$$(S_1^\lambda S_2^\mu)(S_1^{\lambda'} S_2^{\mu'}) = S_1^{\lambda+\lambda'} S_2^{\mu+\mu'}.$$

Das Produkt zweier Substitutionen des Systems (2) gehört also ebenfalls diesem System an.

Die Substitutionen (2) sind nicht notwendig alle untereinander verschieden. Es läßt sich unschwer zeigen, daß dies der Fall ist, wenn man sich bei der Auswahl der Substitutionen S_1 und S_2 gewissen Beschränkungen unterwirft. Da dieser Nachweis für den Beweis, den wir zu führen haben, nicht erforderlich ist, gehen wir darauf nicht ein.

Auf jeden Fall ist der Grad ϱ_2 der Gruppe Γ_2 durch α_1 teilbar, weil Γ_2 eine Untergruppe Γ_1 vom Grade α_1 enthält (§ 91), und er ist $> \alpha_1$, weil Γ_2 die nicht zu Γ_1 gehörige Substitution S_2 enthält.

Sofern die Gruppe Γ_2 nicht mit der Gruppe G identisch ist, wählen wir unter den nicht zu Γ_2 gehörigen Substitutionen von G eine beliebige S_3 aus; ihre Ordnung sei α_3. Die Substitutionen

(3) $$S_1^\lambda S_2^\mu S_3^\nu$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, \cdots, \alpha_1 - 1;\ \mu = 0, 1, 2, \cdots, \alpha_2 - 1;\ \nu = 0, 1, 2, \cdots, \alpha_3 - 1)$$

bilden eine Gruppe Γ_3, deren Grad ϱ_3 durch ϱ_2 teilbar und $> \varrho_2$ ist.

In dieser Weise fortfahrend überzeugt man sich, daß alle Substitutionen der Gruppe G in der Form

(4) $$\begin{cases} S_1^\lambda S_2^\mu S_3^\nu \ldots S_k^\gamma \\ \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, 2, \cdots, \alpha_1 - 1; & \mu = 0, 1, 2, \cdots, \alpha_2 - 1 \\ \nu = 0, 1, 2, \cdots, \alpha_3 - 1; & \gamma = 0, 1, 2, \cdots, \alpha_k - 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

dargestellt werden können. Die Substitutionen

$$S_1^\lambda S_2^\mu S_3^\nu \cdots S_h^\beta \quad (h = 1, 2, \cdots, k-1)$$

bilden eine Untergruppe Γ_h; ihr Grad sei ϱ_h.

Weil die Substitutionen der Gruppe G untereinander vertauschbar sind, so ist jede Untergruppe derselben ausgezeichnet; dies gilt insbesondere für die Untergruppe Γ_h. Es sei nun S_k^δ die niederste positive Potenz der Substitution S_k, die in

der Untergruppe Γ_{k-1} enthalten ist; die Substitutionen dieser Untergruppe bezeichnen wir mit

(5) $$1 \ T_1 \ T_2 \ldots T_{\varrho_{k-1}-1}.$$

Die Substitutionen

(6) $$S_k^\lambda \ T_1 S_k^\lambda \ T_2 S_k^\lambda \cdots T_{\varrho_{k-1}-1} S_k^\lambda \ (\lambda = 0, 1, 2, \cdots, \delta - 1)$$

sind alle untereinander verschieden. Wäre nämlich etwa

$$T_\nu S_k^\lambda = T_\sigma S_k^\mu \qquad (\lambda > \mu)$$

so gehörte die Substitution

$$S_k^{\lambda-\mu} = T_\nu^{-1} T_\sigma,$$

deren Exponent $< \delta$ ist, der Untergruppe Γ_{k-1} an, entgegen unserer Voraussetzung. Das System (6) enthält somit alle Substitutionen der Gruppe G und jede nur einmal, folglich ist

$$\delta = \frac{r}{\varrho_{k-1}}.$$

Es sei nun φ eine δ-wertige Funktion, die zur Gruppe Γ_{k-1} gehört; ihre verschiedenen Werte bezeichnen wir mit

(7) $$\varphi \ \varphi_1 \ \varphi_2 \cdots \ \varphi_{\delta-1}.$$

Der Substitution S_k entspricht eine Substitution U, die diese Werte permutiert und den Potenzen von S_k entsprechen demgemäß die Potenzen von U. Die Gruppe der Gleichung δ-ten Grades, der die Größen (7) genügen, besteht somit aus den Potenzen einer Substitution U, sie ist also zyklisch, da die in Rede stehende Hilfsgleichung irreduzibel ist (s. S. 303 u. 318). Folglich wird die Größe φ durch eine binomische Gleichung bestimmt.

Nachdem der Rationalitätsbereich durch Adjunktion der Größe φ erweitert ist, reduziert sich die Gruppe der vorgelegten Gleichung auf die Gruppe Γ_{k-1}; diese ist ebenfalls eine Abelsche Gruppe und es läßt sich daher das auseinandergesetzte Verfahren abermals anwenden. Wir gelangen daher durch Auflösung von binomischen Hilfsgleichungen schließlich zur Lösung der gegebenen Gleichung.

Eine irreduzible Gleichung n-ten Grades $f(x) = 0$ ist eine Abelsche Gleichung, wenn sie die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

Erstens: alle Wurzeln lassen sich als rationale Funktionen einer derselben darstellen; es sei etwa

$$(8) \qquad x_2 = \psi_2(x_1) \quad x_3 = \psi_3(x_1) \cdots x_n = \psi_n(x_1).$$

Zweitens: zwischen den Funktionen ψ besteht die Beziehung

$$(9) \qquad \psi_\nu[\psi_\mu(x_1)] = \psi_\mu[\psi_\nu(x_1)] \quad \mu, \nu = 2, 3, \cdots, n.$$

Substituieren wir in die Grundgleichung $f(x) = 0$ den Ausdruck $x = \psi_\nu(x)$, so erhalten wir eine Gleichung $F(x) = 0$, die mit der Grundgleichung die Wurzel x_ν (8), also weil diese irreduzibel ist, alle Wurzeln gemein hat (§ 94). Daraus folgt, daß die n Größen

$$(10) \quad x_1' = x_\nu \quad x_2' = \psi_2(x_1') \quad x_3' = \psi_3(x_1') \cdots x_n' = \psi_n(x_1')$$

Wurzeln unserer Grundgleichung sind. Sie sind aller untereinander verschieden. Denn bestände die Gleichung

$$\psi_\lambda(x_1') = \psi_\mu(x_1'),$$

so müßten dieser Gleichung alle Wurzeln der Grundgleichung, also insbesondere auch die Wurzel x_1 genügen, was unmöglich ist. Die n Größen (10)

$$x_1' x_2' \ldots x_n'$$

sind demnach eine Permutation der Wurzeln der Grundgleichung. Diese Permutation ist vollständig durch Angabe der Wurzel x_ν charakterisiert, durch die die Wurzel x_1 ersetzt wird. Eine Substitution der Gruppe der Grundgleichung ist demnach durch Angabe der Wurzel bestimmt, die sie an Stelle der Wurzel x_1 treten läßt.

Es sei S_ν diejenige Substitution, die x_1 durch x_ν ersetzt, S_μ ersetze x_1 durch x_μ, folglich läßt das Substitutionenprodukt $S_\mu S_\nu$ an Stelle von x_1 $\psi_\mu[\psi_\nu(x_1)]$ treten; das Produkt $S_\nu S_\mu$ ersetzt x_1 durch $\psi_\nu[\psi_\mu(x_1)]$. Wegen (9) ist daher $S_\mu S_\nu = S_\nu S_\mu$. Die Gruppe ist somit eine Abelsche.

§ 99. Erweiterung des Gruppenbegriffs. Der Begriff der Gruppe läßt sich leicht beträchtlich erweitern.

Es sei irgend ein System von Operationen definiert, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Dem System gehöre die identische Operation an; sie ist dadurch charakterisiert, daß sie das Objekt, auf das sie anzuwenden ist, ungeändert läßt.

2. Die zu einer Operation des Systems „inverse“ Operation gehöre ebenfalls dem System an; zwei zueinander inverse Operationen sind dadurch charakterisiert, daß sie, nacheinander ausgeführt, die identische Operation ergeben.

3. Zwei Operationen des Systems sollen, nacheinander ausgeführt, eine Operation ergeben, die ebenfalls dem System angehört.

Ein System von Operationen, das diese drei charakteristischen Eigenschaften besitzt, bezeichnet man als „Gruppe“.

Wir wollen die einzelnen Operationen wieder als Substitutionen bezeichnen, ohne damit die Bedeutung derselben genauer bestimmen zu wollen.

Je nachdem die Substitutionen der Gruppe eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit bilden oder nicht, bezeichnet man die Gruppe als kontinuierlich oder als diskontinuierlich. Eine diskontinuierliche Gruppe heißt „uneigentlich diskontinuierlich“, wenn sie Substitutionen enthält, die von der identischen Substitution unendlich wenig verschieden sind. Enthält sie keine derartigen Substitutionen, so heißt sie „eigentlich diskontinuierlich“. Eine diskontinuierliche Gruppe heißt „endlich“ oder „unendlich“, je nachdem sie eine endliche oder unendliche Anzahl verschiedener Substitutionen umfaßt.

Eine endliche Gruppe ist notwendig eigentlich diskontinuierlich.

Ein einfaches Beispiel wird diese Definitionen anschaulich machen. Die Gesamtheit der Drehungen eines räumlichen Systems um eine feste Achse bildet eine kontinuierliche Gruppe. Setzen wir fest, daß der Drehungswinkel ein Multiplum eines gegebenen Winkels $2\pi\alpha$ sein soll, so erhalten wir eine diskontinuierliche Gruppe. Diese Gruppe ist endlich, wenn α eine rationale Zahl — etwa $= \frac{m}{n}$ — ist; in diesem Fall enthält die Gruppe nur die n verschiedenen Substitutionen, die der Drehung um die Winkel

$$0 \quad \frac{2\pi}{n} \quad \frac{4\pi}{n} \quad \frac{(2n-2)\pi}{n}$$

entsprechen. Ist dagegen α eine irrationale Zahl, so ist die Gruppe unendlich und, wie man sich leicht überzeugt, uneigentlich diskontinuierlich.

Die im vorausgehenden für endliche Gruppen aufgestellten Definitionen der Transformation, der Untergruppe und der ausgezeichneten Untergruppe lassen sich ohne weiteres auf unendliche diskontinuierliche Gruppen übertragen. Insbesondere können wir, wenn eine unendliche diskontinuierliche Gruppe G und eine Untergruppe Γ derselben vorgelegt sind, die Substitutionen der Gruppe G in eine Tabelle von der im § 91 angegebenen Art ordnen:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & S_1 & S_2 & S_3 & \cdots \\ T_1 & S_1 T_1 & S_2 T_1 & S_3 T_1 & \cdots \\ T_2 & S_1 T_2 & S_2 T_2 & S_3 T_2 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

In der ersten Zeile stehen die sämtlichen Substitutionen der Untergruppe Γ. Die Substitutionen $T_1 T_2 T_3 \cdots$ können derart gewählt werden, daß jede Substitution der Gruppe G in der Tabelle einmal und nur einmal vorkommt. Selbstverständlich muß, wenn die Gruppe G unendlich ist, entweder die Zahl der Zeilen der Tabelle oder die Anzahl der Spalten oder jede der beiden Zahlen unendlich sein.

Besonderes Interesse bietet der Fall, daß zwar die Anzahl der Spalten — die Anzahl der Substitutionen der Untergruppe Γ — unendlich ist, daß aber nur eine endliche Anzahl von Zeilen auftritt. Diese letztere Anzahl bezeichnet man als Index der Untergruppe.

Es kann der Fall eintreten, daß sich alle Substitutionen einer unendlichen Gruppe aus den positiven und negativen Potenzen einer endlichen Anzahl von Substitutionen zusammensetzen lassen. In diesem Fall bezeichnet man diese Substitutionen als „erzeugende Substitutionen“ der Gruppe. Es ist einleuchtend, daß auch umgekehrt das System der Substitutionen, die sich als Produkte der positiven und negativen Potenzen von irgend welchen k Substitutionen darstellen lassen, Gruppencharakter besitzt.

Ein Beispiel einer unendlichen Gruppe, die durch eine endliche Anzahl von Substitutionen erzeugt wird, bietet die Gruppe der Periodentransformationen

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3 \qquad \omega_3' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3 .$$

Die Koeffizienten dieser Substitutionen sind ganze Zahlen, die der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügen.

Wir haben im § 39 gesehen, daß sich alle Substitutionen der Gruppe aus den drei Substitutionen

$$(1) \qquad \omega_1' = -\omega_1 \qquad \omega_3' = -\omega_3$$

$$(2) \qquad \omega_1' = \omega_3 \qquad \omega_3' = -\omega_1$$

$$(3) \qquad \omega_1' = \omega_1 \qquad \omega_3' = \omega_1 + \omega_3$$

zusammensetzen lassen. Diese Substitutionen sind also die Erzeugenden der Gruppe.

Gehen wir von der Gruppe der Periodentransformationen zu der Gruppe der Transformationen des Periodenquotienten $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ über, so entspricht der Substitution (1) die identische Substitution und wir erhalten für die Gruppe

$$\tau' = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}$$

nur die beiden erzeugenden Substitutionen

$$(S) \qquad \tau' = \tau + 1$$

und

$$(T) \qquad \tau' = -\frac{1}{\tau}.$$

Achter Abschnitt.

Teilung und Transformation.

§ 100. Algebraische Beziehungen zwischen elliptischen Funktionen, die verschiedene Perioden besitzen. Wir haben früher (§ 47) bewiesen, daß zwischen zwei elliptischen Funktionen mit denselben Perioden eine algebraische Beziehung stattfindet; wir legen uns nun die Frage vor: unter welchen Bedingungen besteht zwischen zwei elliptischen Funktionen, die verschiedene Perioden besitzen, eine algebraische Gleichung?

Wir können die Fragestellung etwas vereinfachen. Nehmen wir an, die Funktion $\varphi(u)$ besitze die Perioden $2\omega_1, 2\omega_3$, die Funktion $\psi(u)$ die Perioden $2\omega_1', 2\omega_3'$. Die Funktion $\varphi(u)$ läßt sich rational durch die Funktionen

$$x = p(u/\omega_1, \omega_3) \quad \text{und} \quad s = p'(u/\omega_1, \omega_3)$$

ausdrücken (§ 47) und entsprechend läßt sich $\psi(u)$ durch die Funktionen

$$y = p(u/\omega_1', \omega'_3) \quad \text{und} \quad t = p'(u/\omega_1', \omega_3')$$

rational ausdrücken. Es bestehen also Gleichungen der Form

$$(1) \qquad \varphi = \Phi(x, s) \qquad \psi = \Psi(y, t)$$

wo Φ und Ψ rationale Funktionen bedeuten.

Zwischen den Größen x und s bzw. y und t bestehen die algebraischen Gleichungen

$$(2) \qquad s^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 \qquad t^2 = 4y^3 - g_2' y - g_3'.$$

Wenn nun die Funktionen φ und ψ einer algebraische Gleichung

$$(3) \qquad G(\varphi, \psi) = 0$$

genügen, so genügen auch die Funktionen x und y einer algebraischen Gleichung

$$(4) \qquad F(x, y) = 0.$$

Sie ergibt sich aus den Gleichungen (1), (2) und (3) durch Elimination der Größen φ, ψ, s und t. Umgekehrt folgt aus der Existenz der Gleichung (4) die Existenz der Gleichung (3). Wir brauchen daher nur die Bedingungen festzustellen, unter denen die algebraische Gleichung (4) besteht.

Einem gegebenen Wert der Funktion $x = p(u/\omega_1, \omega_3)$ entsprechen zwei Gitter homologer Punkte

$$(5) \qquad u + 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3 \quad \text{und} \quad -u + 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3$$
$$\lambda, \mu = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots.$$

Da wegen (4) einem gegebenen Wert x nur eine endliche Anzahl von Werten y entspricht, so kann es unter den Punkten (5) nur eine endliche Anzahl geben, die in Beziehung auf die Perioden $2\omega_1'$, $2\omega_3'$ der Funktion y nicht homolog sind. Unter den Punkten, die zum Punkt u in Beziehung auf die beiden Periodensysteme $2\omega_1$, $2\omega_3$ und $2\omega_1'$, $2\omega_3'$ homolog sind, wählen wir zwei Punkte u_1 und u_3 aus, die nicht auf derselben durch u gehenden Geraden liegen. Der Punkt u_1 werde so gewählt, daß er möglichst nahe am Punkt u liegt. Der Punkt u_3 liege in der Halbebene, die man zur Linken hat, wenn man vom Punkt u nach dem Punkt u_1 hin fortschreitet und er werde so gewählt, daß sein Abstand von der Geraden $u_1 u_3$ möglichst klein ist.

Weil die Punkte $u u_1 u_3$ in Beziehung auf die beiden Periodensysteme $2\omega_1$, $2\omega_3$ und $2\omega_1'$, $2\omega_3'$ homolog sind, so lassen sich die Differenzen

$$2\Omega_1 = u_1 - u \quad \text{und} \quad 2\Omega_3 = u_3 - u$$

aus den Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$ und $2\omega_1'$, $2\omega_3'$ zusammensetzen, es bestehen also Gleichungen der Form

$$(6) \qquad \begin{cases} 2\Omega_1 = 2a\omega_1 + 2b\omega_3 = 2a'\omega_1' + 2b'\omega_3' \\ 2\Omega_3 = 2c\omega_1 + 2d\omega_3 = 2c'\omega_1' + 2d'\omega_3'. \end{cases}$$

Die Buchstaben $abcd$ $a'b'c'd'$ bedeuten ganze Zahlen.

Weil die Punkte $u u_1 u_3$ nicht in einer Geraden liegen, kann keine der beiden Determinanten

$$(7) \qquad n = ad - bc \qquad n' = a'd' - b'c'$$

verschwinden.

Die imaginären Teile der Quotienten $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ und $\frac{\omega_3'}{\omega_1'}$ sind positiv imaginär (§ 36), dasselbe gilt zufolge der getroffenen Bestimmung für den Quotienten $\frac{\Omega_3}{\Omega_1}$. Folglich sind die beiden Determinanten n und n' (7) positiv (vgl. die Fußnote S. 132).

Im Innern des Periodenparallelogramms mit den Eckpunkten

$$u \quad u_1 = u + 2\Omega_1 \quad u_2 = u + 2\Omega_1 + 2\Omega_3 \quad u_3 = u + 2\Omega_3$$

kann kein Punkt liegen, der zum Punkt u in Beziehung auf die beiden Periodensysteme $2\omega_1, 2\omega_3$ und $2\omega_1', 2\omega_3'$ homolog ist. Denn ein solcher Punkt müßte näher an der Geraden uu_1 liegen als der Punkt u_3, entgegen der getroffenen Bestimmung. Man überzeugt sich leicht, daß auch auf den Seiten, von den Eckpunkten $u_1 u_2 u_3$ abgesehen, kein derartiger Punkt liegen kann. Wir schließen daraus:

Alle zum Punkt u in Beziehung auf die beiden Periodensysteme $2\omega_1, 2\omega_3$ und $2\omega_1', 2\omega_3'$ homologen Punkte gehören dem Punktgitter

$$u + 2\lambda\Omega_1 + 2\mu\Omega_3$$

an.

Die Funktionen

$$x = p(u/\omega_1, \omega_3) \quad \text{und} \quad y = p(u/\omega_1', \omega_3')$$

können wegen (6) auch als doppelt periodische Funktionen mit den Perioden $2\Omega_1, 2\Omega_3$ betrachtet werden. Weil sie beide gerade Funktionen sind, so lassen sie sich daher rational durch die Funktion

$$z = p(u/\Omega_1, \Omega_3)$$

ausdrücken. Es sei

$$(8) \qquad x = R(z) \qquad y = R_1(z).$$

Eliminieren wir aus diesen Gleichungen die Größe z, so erhalten wir eine algebraische Gleichung zwischen den Größen x und y.

Die Gleichungen (6) drücken also die notwendige und ausreichende Bedingung dafür aus, daß zwischen den Funktionen $x = \wp(u/\omega_1, \omega_3)$ und $y = \wp(u/\omega_1', \omega_3')$ eine algebraische Beziehung besteht.

Es ist einleuchtend, daß die Ordnungen der rationalen Funktionen R und R' (8) durch die in (6) auftretenden ganzen Zahlen $abcd$ und $a'b'c'd'$ bestimmt sind. Um dies genauer zu untersuchen, bezeichnen wir den größten gemeinschaftlichen Divisor der Zahlen a und b mit σ und setzen

$$a = \sigma\alpha \qquad b = \sigma\beta. \tag{9}$$

Weil die Zahlen α und β relativ prim sind, können wir zwei Zahlen $\gamma\ \delta$ so wählen, daß

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{10}$$

ist. Wir führen nun an Stelle der Halbperioden $\omega_1\,\omega_3$ zwei äquivalente Halbperioden

$$\varpi_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3 \qquad \varpi_3 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3 \tag{11}$$

ein. Aus (6) und (7) folgt mit Rücksicht auf (9) und (11)

$$\Omega_1 = \sigma\varpi_1 \qquad \Omega_3 = (c\delta - d\gamma)\,\varpi_1 + \frac{n}{\sigma}\,\varpi_3. \tag{12}$$

Von dieser Gleichung ausgehend, können wir nun leicht feststellen, wie viel verschiedene Werte z einem gegebenen Wert x entsprechen.

Einem gegebenen Wert x entsprechen in der u-Ebene die beiden Punktgitter

$$u + 2\lambda\varpi_1 + 2\mu\varpi_3 \quad \text{und} \quad -u + 2\lambda\varpi_1 + 2\mu\varpi_3.$$

Auf Grund der Gleichung (12) können wir diese Punktgitter auch in der Form

$$\pm u + 2\lambda'\Omega_1 + 2\mu'\Omega_3 + 2\varkappa\varpi_1 + 2\nu\varpi_3$$

darstellen und uns dabei so einrichten, daß die Zahlen $\varkappa\,\nu$ die Bedingungen

$$0 \leqq \varkappa < \sigma \quad \text{und} \quad 0 \leqq \nu < \frac{n}{\sigma}$$

erfüllen. Den verschiedenen Zahlenpaaren $\varkappa\,\nu$, die diesen Ungleichungen genügen, entsprechen $2n$ Punkte — in jedem der

beiden Punktgitter n — die zwar in bezug auf das Periodenpaar $2\varpi_1$, $2\varpi_3$ — oder was dasselbe sagen will, in Beziehung auf das Periodenpaar $2\omega_1$, $2\omega_3$ — aber nicht in Beziehung auf das Periodenpaar $2\Omega_1$, $2\Omega_3$ homolog sind. Je zwei von diesen $2n$ Punkten entspricht derselbe Wert z, weil z eine gerade Funktion ist. Es entsprechen also einem Werte x n verschiedene Werte z; die Ordnung der Funktion $R(z)$ (8) ist demnach gleich der Determinante $n = ad - bc$. In derselben Art ist zu zeigen, daß die Ordnung der Funktion $R_1(z)$ gleich der Determinante $n' = a'd' - b'c'$ ist.

Den n Werten z, die einem Wert x entsprechen, entsprechen n verschiedene Werte y. Kämen nämlich unter diesen Werten y zwei einander gleiche vor, so müßten ihnen in der u-Ebene Punkte entsprechen, die zwar in Beziehung auf die beiden Periodensysteme $2\omega_1$, $2\omega_3$ und $2\omega_1'$, $2\omega_3'$ aber nicht in Beziehung auf das Periodensystem $2\Omega_1$, $2\Omega_3$ zueinander homolog wären. Aber dies ist, wie oben nachgewiesen worden ist, unmöglich. Es entsprechen also einem gegebenen Wert x n verschiedene Werte y und analog entsprechen einem gegebenen Wert y n' verschiedene Werte x. Folglich ist die algebraische Gleichung, der die Größen x und y genügen, in x vom Grade n' und in y vom Grade n.

Durch die vorausgehenden Betrachtungen ist das am Anfang dieses Paragraphen gestellte Problem wesentlich vereinfacht: wir können uns darauf beschränken, die rationale Beziehung, die zwischen den Funktionen $x = p(u/\omega_1, \omega_3)$ und $z = p(u/\Omega_1, \Omega_3)$ besteht, genauer zu untersuchen.

§ 101. Die rationale Transformation. Die Funktion $x = p(u/\omega_1, \omega_3)$ genügt der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 . \tag{1}$$

Die Funktion $z = p(u/\Omega_1, \Omega_3)$ genügt einer analogen Differentialgleichung

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - \bar{g}_2 z - \bar{g}_3 . \tag{2}$$

Aus (1) ergibt sich für u die Darstellung

(3) $$u = \int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

und aus (2) folgt

(4) $$u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - \bar{g}_2 z - \bar{g}_3}}.$$

Durch die rationale Transformation

(5) $$x = R(z)$$

wird demnach das Weierstraßsche Normalintegral (3) in das Normalintegral (4) transformiert.

Damit sind wir von einer ganz anderen Seite her wieder zu dem im § 16 behandelten Transformationsproblem gelangt. Die algebraischen Methoden, die wir a. a. O. angewendet haben, reichen zu einer tiefer eindringenden Untersuchung des Problems nicht aus; mit den nunmehr zur Verfügung stehenden transzendenten Hilfsmitteln läßt es sich leicht erledigen.

Wir wollen uns zunächst einen Überblick über die möglichen rationalen Transformationen verschaffen. Zu dem Zweck bemerken wir: einer jeden rationalen Transformation (5) entspricht eine „Periodentransformation" (Nr. 6 des vorigen Paragraphen)

(6) $$\Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3 \quad \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3 \quad ad - bc = n.$$

Indem wir an Stelle der Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$ die äquivalenten Perioden $2\varpi_1$, $2\varpi_3$ einführen, können wir dieser Transformation auch die Form geben (Nr. 12 des vorigen Paragraphen)

(7) $$\Omega_1 = \sigma\varpi_1 \quad \Omega_3 = \varrho\varpi_1 + \frac{n}{\sigma}\varpi_3 \quad \varrho = c\delta - d\gamma.$$

Weil die Zahlen $\gamma\,\delta$ nur der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ unterliegen (Nr. 10 des vorigen Paragraphen), so dürfen wir gleichzeitig γ durch $\gamma' = \gamma + \nu\alpha$ und δ durch $\delta' = \delta + \nu\beta$ ersetzen, wo ν eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Es tritt dann an Stelle der in (7) auftretenden Zahl $c\delta - d\gamma$ die Zahl

$$c\delta' - d\gamma' = c\delta - d\gamma + \nu\frac{cb - da}{\sigma} = c\delta - d\gamma - \nu\frac{n}{\sigma}.$$

Die in der zweiten Gleichung (7) vorkommende Zahl ϱ ist also nur nach dem Modul $\frac{n}{\sigma}$ bestimmt.

Die Gleichungen (7) bezeichnet man als kanonische Form der Periodentransformation (6).

Zwei rationale Transformationen, die zu derselben kanonischen Periodentransformation führen, sind notwendig identisch und umgekehrt entsprechen verschiedenen kanonischen Periodentransformationen auch verschiedene rationale Transformationen.

Nehmen wir nun an, die Ordnung n der rationalen Funktion $R(z)$ — „der Grad der Transformation" — sei gegeben. Für $\frac{n}{\sigma}$ dürfen wir einen beliebigen Divisor der Zahl n und für ϱ eine beliebige Zahl aus der Reihe $0, 1, 2 \cdots \frac{n}{\sigma} - 1$ wählen. Die Anzahl der in Betracht kommenden Zahlenpaare $\sigma\ \varrho$ ist also gleich der Summe der Divisoren der Zahl n. Es folgt:

Die Anzahl der verschiedenen Transformationsklassen vom gegebenen Grad n ist gleich der Summe der Divisoren der Zahl n.

Wenn die Zahl n eine Primzahl ist, so ist daher diese Summe $= n + 1$.

Die weitere Untersuchung der rationalen Transformationen können wir durch die folgende Überlegung wesentlich abkürzen:

Führen wir erst die Transformation n-ten Grades (5) und dann eine Transformation m-ten Grades

$$z = R_1(Z) \qquad Z = p(u / \Omega_1', \Omega_3') \tag{8}$$

aus, so erhalten wir eine Transformation

$$x = R_2(Z) \tag{9}$$

vom Grade nm.

Der Transformation (5) entspricht die Periodentransformation (7); die zur Transformation (8) gehörige Periodentransformation sei

$$\Omega_1' = \sigma' \Omega_1 \quad \Omega_3' = \varrho' \Omega_1 + \frac{m}{\sigma'} \Omega_3. \tag{10}$$

Aus (7) und (10) ergibt sich die zur Transformation (9) gehörige Periodentransformation

$$\Omega_1' = \sigma \sigma' \varpi_1 \quad \Omega_3' = \left(\sigma \varrho' + \frac{m}{\sigma'} \varrho\right) \varpi_1 + \frac{nm}{\sigma \sigma'} \varpi_3. \tag{11}$$

Um zu beweisen, daß sich umgekehrt jede rationale Transformation vom Grade mn aus einer Transformation vom Grade m und einer Transformation vom Grade n zusammensetzen läßt, brauchen wir nur zu zeigen, daß die zugehörige Periodentransformation aus zwei Periodentransformationen von den Graden m und n zusammengesetzt werden kann.

Zu der vorgelegten rationalen Transformation mn-ten Grades gehöre die kanonische Periodentransformation

$$\Omega_1' = s\varpi_1 \quad \Omega_3' = r\varpi_1 + \frac{nm}{s}\varpi_3. \tag{12}$$

Die Zahl r ist nur nach dem Modul $\frac{mn}{s}$ bestimmt.

Die Periodentransformation (12) wird mit der Transformation (11) identisch, wenn wir die Zahlen σ und σ' durch die Gleichung

$$\sigma\sigma' = s \tag{13}$$

und die Zahl r durch die Kongruenz

$$\sigma\varrho' + \frac{m}{\sigma'}\varrho \equiv r \bmod \frac{mn}{s} \tag{14}$$

bestimmen. Wenn die Zahlen m und n relativ prim sind, so sind die Zahlen σ und σ' durch (13) vollständig bestimmt: σ ist der größte gemeinschaftliche Teiler von n und s, σ' der größte gemeinschaftliche Teiler von m und s; σ und m sind also relativ prim. Wenn die Zahlen m und n nicht relativ prim sind, so setzen wir σ' gleich dem größten gemeinschaftlichen Divisor der Zahlen m und s. Unter dieser Annahme ist $\frac{m}{\sigma'}$ relativ prim zu s, also auch zu σ.

Da nun die Zahlen σ und $\frac{m}{\sigma'}$ auf jeden Fall relativ prim sind, so gibt es sicher Zahlen ϱ, ϱ', die der Kongruenz (14) genügen.

Wir können daher die Periodentransformation (12) aus den Transformationen (7) und (10) zusammensetzen.

Wir wollen einen speziellen Fall hervorheben. Nehmen wir an, es sei

$$m = n \quad \sigma = 1 \quad \sigma' = n \quad \varrho = 0 \quad \varrho' = 0.$$

Unter dieser Annahme lauten die Gleichungen (7), (10) und (11)

$$\Omega_1 = \varpi_1 \quad \Omega_3 = n\varpi_3$$
$$\Omega_1' = n\Omega_1 \quad \Omega_3' = \Omega_3$$
$$\Omega_1' = n\varpi_1 \quad \Omega_3' = n\varpi_3$$

und es ist

$$x = p(u/\varpi_1, \varpi_3) \quad z = p(u/\varpi_1, n\varpi_3) \quad Z = \frac{1}{n^2}p\left(\frac{u}{n}\Big/\varpi_1, \varpi_3\right).$$

Diese Gleichungen zeigen, daß wir durch Zusammensetzung zweier Transformationen n-ten Grades zur Multiplikation der elliptischen Funktionen gelangen.

Es ist einleuchtend, daß auch umgekehrt die Multiplikation als Spezialfall der Transformation betrachtet werden kann.

Nachdem wir nachgewiesen haben, daß eine Transformation, deren Grad eine zusammengesetzte Zahl ist, aus Transformationen niedrigeren Grades zusammengesetzt werden kann, können wir uns darauf beschränken, die Transformationen von Primzahlgrad in expliziter Form darzustellen.

§ 102. Die Transformationen von Primzahlgrad.

Wenn n eine Primzahl ist, so haben wir die folgenden Periodentransformationen zu unterscheiden (vgl. Nr. 7 des vorigen Paragraphen).

$$\Omega_1 = \omega_1 \quad \Omega_3 = -\varrho\omega_1 + n\omega_3 \quad (\varrho = 0, 1, 2, \cdots, n-1)^*), \tag{1}$$

$$\Omega_1 = n\omega_1 \quad \Omega_3 = \omega_3. \tag{2}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$z = p(u/\Omega_1, \Omega_3) = p(u), \tag{3}$$

$$x = p(u/\omega_1, \omega_3) = p\left(u/\Omega_1, \frac{\Omega_3 + \varrho\Omega_1}{n}\right) = p_\varrho(u) \tag{4}$$
$$(\varrho = 0, 1, 2, \cdots, n-1),$$

$$x = p(u/\omega_1, \omega_3) = p\left(u/\frac{\Omega_1}{n}, \Omega_3\right) = p_\infty(u). \tag{5}$$

Die Funktion $p_\varrho(u)$ wird, als elliptische Funktion mit den Perioden Ω_1, Ω_3 betrachtet, zur zweiten Ordnung unendlich in den nicht homologen Punkten

---

*) Wir lassen der Einfachheit wegen bei den Größen $\omega_1\,\omega_3$ die Akzente weg und ersetzen ϱ durch $-\varrho$.

$$\nu \frac{2\Omega_3 + 2\varrho\Omega_1}{n} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

die Funktion $p_\infty(u)$ in den Punkten

$$\nu \cdot \frac{2\Omega_1}{n} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(6) \qquad a_\varrho = \frac{2\Omega_3 + 2\varrho\Omega_1}{n} \qquad a_\infty = \frac{2\Omega_1}{n}.$$

Wir können nun die eben gemachten Angaben zusammenfassen und sagen:

Die Funktion $p_\varrho(u)$ wird in den n nicht homologen Punkten

$$0 \quad a_\varrho \quad 2a_\varrho \cdots (n-1)\,a_\varrho$$

zur zweiten Ordnung unendlich und zwar gilt dies für die $n+1$ Indizes

$$\varrho = 0, 1, 2, \cdots n-1, \infty.$$

Im Punkt νa_ϱ bleibt die Differenz

$$p_\varrho(u) - \frac{1}{(u - \nu a_\varrho)^2},$$

also auch die Differenz

$$p_\varrho(u) - p(u - \nu a_\varrho)$$

stetig. Folglich wird die Differenz

$$p_\varrho(u) - \sum_{\nu=0}^{n-1} p(u - \nu a_\varrho)$$

im Periodenparallelogramm $(2\Omega_1, 2\Omega_3)$ nirgends unstetig, sie ist daher konstant. Der Wert dieser Konstanten ergibt sich aus der Bemerkung, daß für $u = 0$

$$\lim\left(p(u) - \frac{1}{u^2}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \lim\left(p_\varrho(u) - \frac{1}{u^2}\right) = 0$$

ist. Wir erhalten

$$(7) \qquad p_\varrho(u) = p(u) + \sum_{\nu=1}^{n-1}\left[p(u - \nu a_\varrho) - p(\nu a_\varrho)\right].$$

Um diese Formel weiter auszuführen, müssen wir den Fall, daß n eine ungerade Primzahl ist, und den Fall $n = 2$ unterscheiden. Im ersten Fall können wir auf Grund der

Periodizität der p-Funktion die Gleichung (7) in der Form schreiben:

$$p_\varrho(u) = p(u) + \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} [p(u+\nu a_\varrho) + p(u-\nu a_\varrho)] - 2\sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} p(\nu a_\varrho).$$

Mit Rücksicht auf das Additionstheorem der p-Funktion folgt (§ 52)

$$(8)\quad \begin{cases} p_\varrho(u) = p(u) + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{[2p(u)p(\nu a_\varrho) - \frac{1}{2}g_2][p(u)+p(\nu a_\varrho)] - g_3}{[p(u)-p(\nu a_\varrho)]^2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 2\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} p(\nu a_\varrho) \\ \quad = p(u) + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{p''(\nu a_\varrho)}{p(u)-p(\nu a_\varrho)} + \frac{(p'(\nu a_\varrho))^2}{(p(u)-p(\nu a_\varrho))^2}\right]. \end{cases}$$

Damit ist die Aufgabe, die Funktion $x = p_\varrho(u)$ rational durch die Funktion $z = p(u)$ auszudrücken, gelöst. Auf die algebraische Gleichung, die die Koeffizienten der rationalen Funktion bestimmt, werden wir später zurückkommen.

§ 103. Die Transformationen zweiten Grades. Mit den Transformationen zweiten Grades haben wir uns schon im ersten Abschnitt (§ 17) eingehend beschäftigt. Wir wollen nun zeigen, wie sich die früher gefundenen Formeln durch Spezialisierung der Gleichungen (6) des vorigen Paragraphen ergeben. Um die Bezeichnung mit der im § 17 gebrauchten in Einklang zu bringen, setzen wir

$$(1)\qquad x = p(u/\omega_1, \omega_3) = p_\nu(u) \quad s = p_\nu'(u),$$

$$(2)\qquad y = p(u/\Omega_1, \Omega_3) = p(u) \quad S = p'(u),$$

$$(3)\qquad s^2 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3),$$

$$(4)\qquad S^2 = 4(y-\varepsilon_1)(y-\varepsilon_2)(y-\varepsilon_3),$$

$$(5)\qquad k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} \quad k'^2 = \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3},$$

$$(6)\qquad \varkappa^2 = \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_3}{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \quad \varkappa'^2 = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1-\varepsilon_3}.$$

Wir betrachten die Größen $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ als gegeben; die Bezeichnung sei so gewählt, daß der absolute Betrag $|\varepsilon_1 - \varepsilon_3|$ größer oder wenigstens nicht kleiner ist als die absoluten Beträge $|\varepsilon_2 - \varepsilon_3|$ und $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$. Das Vorzeichen der Größen $\varkappa$ und $\varkappa'$ wählen wir so, daß ihre reellen Teile positiv sind.

Um die Gleichungen (7) des vorigen Paragraphen umzuformen, benutzen wir die Gleichungen (§ 52 Schluß)

$$p(u + \Omega_\lambda) - \varepsilon_\lambda = \frac{(\varepsilon_\lambda - \varepsilon_\mu)(\varepsilon_\lambda - \varepsilon_\nu)}{p(u) - \varepsilon_\lambda}$$

(λ, μ, ν eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3)

und erhalten

$$p_0(u) = p\left(u/\Omega_1, \frac{\Omega_3}{2}\right) = p(u) + \frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)}{p(u) - \varepsilon_3}, \tag{7}$$

$$p_1(u) = p\left(u/\Omega_1, \frac{\Omega_2}{2}\right) = p(u) + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{p(u) - \varepsilon_2}, \tag{8}$$

$$p_\infty(u) = p\left(u/\frac{\Omega_1}{2}, \Omega_3\right) = p(u) + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{p(u) - \varepsilon_1}. \tag{9}$$

Die letzte Gleichung stellt die Landensche Transformation dar. Wir wollen zunächst bei dieser stehen bleiben. Für $u = \Omega_3$ ist

$$p(u) = \varepsilon_3 \quad p_\infty(u) = e_3$$

und aus (9) folgt

$$e_3 = \varepsilon_3 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = -2\varepsilon_1. \tag{10}$$

Für $u = \frac{\Omega_1}{2}$ und $u = \frac{\Omega_1}{2} + \Omega_3$ nimmt $p_\infty(u)$ die Werte e_1 bzw. e_2 an; die Zuordnung kann beliebig gewählt werden. Für diese Werte verschwindet die Derivierte $p'_\infty(u)$, aber nicht die Derivierte $p'(u)$. Die Werte der Funktion $p(u)$, die den Werten $p_\infty(u) = e_1$ und $p_\infty(u) = e_2$ entsprechen, sind demnach Wurzeln der Gleichung

$$(y - \varepsilon_1)^2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 \varkappa'^2. \tag{6}$$

Wir genügen der Gleichung (9), indem wir setzen

$$\begin{cases} e_1 = \varepsilon_1 + 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\varkappa' = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)[\frac{1}{3}(1 + \varkappa'^2) + 2\varkappa'] \\ e_2 = \varepsilon_1 - 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\varkappa' = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)[\frac{1}{3}(1 + \varkappa'^2) - 2\varkappa']. \end{cases} \tag{11}$$

Es folgt mit Rücksicht auf (5) und (10)

$$k^2 = \left(\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}\right)^2 \quad k'^2 = \frac{4\varkappa'}{(1+\varkappa')^2}. \tag{12}$$

Die Vorzeichen der Größen k und k' wählen wir so, daß ihre reellen Teile positiv sind. Es ist also, weil der reelle Teil von $\varkappa'$ positiv und der absolute Betrag $|\varkappa'| < 1$ ist

$$k = \frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'} \tag{13}$$

zu setzen. Aus dieser Gleichung folgt

$$k = \frac{\varkappa^2}{(1+\varkappa')^2}.$$

Weil der reelle Teil von $\varkappa'$ positiv ist, ist $|1+\varkappa'| > 1$, folglich ist

$$|k| < |\varkappa|^2. \tag{14}$$

Die Gleichung (7) stellt die Gaußsche Transformation dar.

Durch eine der eben durchgeführten ganz ähnliche Rechnung erhalten wir

$$\begin{cases} e_1 = -2\varepsilon_3 \\ e_2 = \varepsilon_3 + 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\varkappa = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\left[-\tfrac{1}{3}(1+\varkappa^2) + 2\varkappa\right] \\ e_3 = \varepsilon_3 - 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\varkappa = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\left[-\tfrac{1}{3}(1+\varkappa^2) - 2\varkappa\right] \end{cases} \tag{15}$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf (5)

$$k' = \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa} \quad \text{und} \quad |k'| < |\varkappa'|^2. \tag{16}$$

In § 19 haben wir gezeigt, daß die wiederholte Anwendung der Landenschen Transformation zur Berechnung des Integrals erster Gattung führt. Dabei haben wir uns aber auf reelle Werte des Moduls und der Integrationsgrenze beschränkt. Wenn eine dieser Größen einen komplexen Wert besitzt, so gestaltet sich dieses Verfahren zu umständlich und wir haben deswegen im § 68 zwei Reihenentwicklungen hergestellt, die in diesem Fall zur Berechnung des Integralwertes dienen können. Die erste dieser Reihen konvergiert im ungünstigsten Fall — wenigstens annähernd — wie eine geometrische Reihe, deren Reihenexponent gleich dem Modul ist, die zweite wie eine

Reihe, deren Exponent gleich dem komplementären Modul ist. Um zu einer stärker konvergierenden Reihe zu gelangen, transformieren wir das zu berechnende Integral erster Gattung

$$u = \int_{(y,S)}^{\infty} \frac{dy}{2\sqrt{(y-\varepsilon_1)(y-\varepsilon_2)(y-\varepsilon_3)}}$$

durch die Landensche Substitution (9) in das Integral

$$u = \int_{(x,s)}^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

und benutzen zur Berechnung dieses Integrals die erste der obengenannten Reihenentwicklungen. Anstatt dessen können wir auch die Gaußsche Transformation (7) anwenden und dann die zweite Reihenentwicklung benutzen.

Das erste Verfahren ist vorteilhafter, wenn $|\varkappa| < |\varkappa'|$ ist, das zweite, wenn $|\varkappa| > |\varkappa'|$ ist. Der ungünstigste Fall tritt ein, wenn

$$|\varepsilon_1 - \varepsilon_3| = |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| = |\varepsilon_2 - \varepsilon_3|, \quad \text{also} \quad \varkappa^2 = e^{\pm\frac{\pi i}{3}}, \quad \varkappa'^2 = e^{\mp\frac{\pi i}{3}}$$

ist. In diesem Fall folgt aus (13)

$$k = \frac{1 - e^{\mp\frac{\pi i}{6}}}{1 + e^{\mp\frac{\pi i}{6}}} = \frac{e^{\pm\frac{\pi i}{12}} - e^{\mp\frac{\pi i}{12}}}{e^{\pm\frac{\pi i}{12}} + e^{\mp\frac{\pi i}{12}}},$$

also

$$|k| = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 0{,}268\cdots.$$

Denselben Wert liefert (16) für $|k'|$.

Die Transformation (8) können wir benutzen, um eine p-Funktion, die eine reelle Invariante aber eine negative Diskriminante besitzt, in eine p-Funktion mit positiver Diskriminante zu transformieren (vgl. § 12)

Nehmen wir an, die Größe ε_2 sei reell, die Größen ε_1 und ε_3 seien konjugiert imaginär. Aus (8) folgt, wenn wir $u = \omega_1$ setzen

$$e_1 = -2\varepsilon_2.$$

Die den Werten e_2, e_3 entsprechenden Werte

$$p(\tfrac{1}{2}\Omega_2), \quad p(\Omega_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_2)$$

sind Wurzeln der Gleichung

$$(y - \varepsilon_2)^2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3).$$

Folglich ist

$$e_2 = \varepsilon_2 \pm \sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)} \quad e_3 = \varepsilon_2 \mp \sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}.$$

Das Produkt der konjugiert imaginären Größen $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$ ist positiv, demnach sind die drei Größen $e_1 e_2 e_3$ reell.

§ 104. Die Teilungsgleichung. Im § 100 haben wir gezeigt: wenn zwischen den Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$ und $2\Omega_1$, $2\Omega_3$ der Funktionen

$$x = p(u/\omega_1, \omega_3) \quad \text{und} \quad z = p(u/\Omega_1, \Omega_3)$$

die Beziehung besteht

$$(1) \qquad \begin{cases} \Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3 \\ \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3 \end{cases} \qquad n = ad - bc$$

so ist x eine rationale Funktion n-ter Ordnung von z.

Wenn der Wert x gegeben ist, so ist demnach z durch eine Gleichung n-ten Grades bestimmt. Die Aufgabe diese Gleichung zu untersuchen, läßt sich auf ein allgemeineres Problem zurückführen, auf das wir schon früher hingewiesen haben.

Aus (1) folgt

$$n\omega_1 = d\Omega_1 - b\Omega_3 \qquad n\omega_3 = -c\Omega_1 + a\Omega_3.$$

Diese Gleichungen zeigen, daß die Funktion $z = p(u/\Omega_1, \Omega_3)$ die Perioden $2n\omega_1$, $2n\omega_3$ besitzt. Nach Kleins Vorgang bezeichnet man die doppelt periodischen Funktionen, denen diese Perioden zukommen, als elliptische Funktionen n-ter Stufe. Sie lassen sich alle rational durch die beiden Funktionen

$$p(u/n\omega_1, n\omega_3) = \frac{1}{n^2} p\left(\frac{u}{n}\Big/\omega_1, \omega_3\right)$$

und

$$p'(u/n\omega_1, n\omega_3) = \frac{1}{n^3} p'\left(\frac{u}{n}\Big/\omega_1, \omega_3\right)$$

ausdrücken. Die Funktion

$$y = p\left(\frac{u}{n}\Big/\omega_1, \omega_3\right)$$

genügt, wie wir gesehen haben (§ 53, Schluß) einer Gleichung n^2-ten Grades von der Form

$$F(y) = A(y) - xB(y) = 0 \tag{2}$$

der „Teilungsgleichung". $A(y)$ und $B(y)$ bedeuten ganze Funktionen vom Grade n^2 der Größe y; die Koeffizienten dieser ganzen Funktionen sind ganze Funktionen der Größen $\frac{1}{2}g_2$ und g_3 mit ganzzahligen Koeffizienten. Die n^2 Wurzeln $y_{\lambda\mu}$ der Teilungsgleichung (2) lassen sich in der Form

$$y_{\lambda\mu} = p\left(\frac{u + 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right) \quad \lambda, \mu = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \tag{3}$$

darstellen (vgl. § 53). Diese n^2 Werte sind im allgemeinen untereinander verschieden; eine Ausnahme tritt nur ein, wenn nu einer Halbperiode kongruent ist.

Die Teilungsgleichung ist irreduzibel; keine ihrer Wurzeln kann einer Gleichung niedrigeren Grades genügen, deren Koeffizienten ebenfalls in x rational sind.

Zum Beweis nehmen wir einen Augenblick an, die Wurzel y_{00} genüge der Gleichung $\Phi(y) = 0$, deren Koeffizienten ganze Funktionen von x sind. Wegen der Periodizität der Funktion $x = p(u/\omega_1, \omega_3)$ ändern sich die Koeffizienten der Gleichung nicht, wenn wir den Wert u durch

$$u + 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3$$

ersetzen. Infolge dieser Vertauschung tritt aber an Stelle der Wurzel

$$y_{00} = p\left(\frac{u}{n}\right) \quad \text{die Wurzel} \quad y_{\lambda\mu} = p\left(\frac{u + 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right).$$

Folglich genügen der Gleichung $\Phi(y) = 0$ die sämtlichen n^2 Wurzeln der Teilungsgleichung.

Um die Gruppe der Teilungsgleichung bestimmen zu können, müssen wir zunächst den Rationalitätsbereich des genaueren festsetzen (vgl. § 94). Wir wollen als rational bekannt ansehen:

1. Die rationalen Zahlen und die Invarianten g_2 und g_3.

2. Die Größen $p\left(\frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right)$ und $p'\left(\frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right)$ $\lambda, \mu = 0, 1, 2, \cdots n$ ausgenommen $\lambda = 0$ $\mu = 0$.

3. Die Größen $p(u)$ und $p'(u)$.

Mit den Gleichungen, die die an zweiter Stelle genannten Größen bestimmen, werden wir uns in den nächsten Paragraphen beschäftigen.

Ersetzen wir in den Gleichungen (3) die Variable u durch $u + 2\varkappa\omega_1 + 2\nu\omega_3$, so tritt an Stelle der Wurzel $y_{\lambda\mu}$ die Wurzel $y_{\lambda+\varkappa,\mu+\nu}$. (Die Indizes sind modulo n zu nehmen.) Wir schließen hieraus: Zur Gruppe der Teilungsgleichung gehört jedenfalls die Substitution $S_{\varkappa\nu}$, die die Wurzel $y_{\lambda\mu}$ durch die Wurzel $y_{\lambda+\varkappa,\mu+\nu}$ ersetzt. Die Anzahl dieser Substitutionen ist n^2. Die Substitution $S_{\varkappa\nu}$ läßt sich aus den Potenzen der beiden Substitutionen S_{10} und S_{01} zusammensetzen. Die Substitution S_{10} vermehrt den ersten Index jeder Wurzel um eine Einheit und läßt den zweiten ungeändert, die Substitution S_{01} läßt den ersten Index ungeändert und vermehrt den zweiten um eine Einheit. Es ist offensichtlich

$$S_{\varkappa\nu} = S_{10}^{\varkappa} S_{01}^{\nu} = S_{01}^{\nu} S_{10}^{\varkappa} \quad (\varkappa, \nu = 0, 1, 2, \cdots n-1).$$

Weil die beiden Substitutionen S_{01} und S_{10} vertauschbar sind, so bilden die n^2 Substitutionen eine Abelsche Gruppe Γ (s. § 98).

Wir beweisen nun, daß die Gruppe G der Teilungsgleichung mit dieser Gruppe Γ identisch ist. Zum Beweis nehmen wir einen Augenblick an, die Gruppe G enthalte eine Substitution U, die nicht der Gruppe Γ angehört. Diese Substitution ersetze die Wurzel y_{00} durch die Wurzel $y_{\varkappa\nu}$. Die Substitution $V = U S_{10}^{-\varkappa} S_{01}^{-\nu}$, die ebenfalls nicht der Gruppe Γ angehört, läßt die Wurzel y_{00} auf ihrem Platz. Aus unserer Annahme folgt also, daß es eine Substitution der Gruppe G gibt, die die Wurzel y_{00} ungeändert läßt. Auf Grund des Additionstheorems der p-Funktion kann man die Wurzel

$$y_{\lambda\mu} = p\left(\frac{u + 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right)$$

rational durch die Größen

$$y_{00} = p\left(\frac{u}{n}\right) \quad p'\left(\frac{u}{n}\right) \quad p\left(\frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right) \quad p'\left(\frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right)$$

ausdrücken. Nun ergibt sich durch Differentiation der Gleichung (2)

$$\left[A'(y) - xB'(y)\right]\frac{dy}{du} - B(y)\frac{dx}{du} = 0.$$

Wir können daher die Größe

$$p'\left(\frac{u}{n}\right) = n\,\frac{dy_{00}}{du}$$

rational durch die Wurzel y_{00} und Größen unseres Rationalitätsbereichs ausdrücken. Daraus folgt, daß sich auch die Wurzel $y_{\lambda\mu}$ rational durch die Wurzel y_{00} und Größen unseres Rationalitätsbereichs ausdrücken läßt. Eine Substitution V, die die Größe y_{00} ungeändert läßt, muß demnach alle n^2 Wurzeln $y_{\lambda\mu}$ ungeändert lassen. Die Annahme, in der Gruppe G komme eine Substitution vor, die nicht in der Gruppe Γ enthalten ist, führt demnach zu einem Widerspruch. Damit ist bewiesen:

Die Gruppe der Teilungsgleichung ist eine Abelsche Gruppe.

Weil sich die Substitutionen der Gruppe G als Produkte der Potenzen von zwei Substitutionen S_{10} und S_{01} darstellen lassen, können wir die Auflösung der Teilungsgleichung auf die Auflösung von zwei binomischen Gleichungen vom Grade n zurückführen (vgl. § 98).

Die Teilung des Arguments der p-Funktion durch eine zusammengesetzte Zahl n kann durch die sukzessive Teilung durch die Faktoren von n ersetzt werden. Man kann sich deshalb darauf beschränken, die Gleichungen genauer zu untersuchen, die der Teilung durch eine Primzahl entsprechen.

Für den einfachsten Fall $n = 2$ wollen wir die Rechnung durchführen. Wir setzen

$$(4)\quad \begin{cases} f_0(u) = p\left(\frac{u}{2}\right) + p\left(\frac{u}{2} + \omega_1\right) + p\left(\frac{u}{2} + \omega_2\right) + p\left(\frac{u}{2} + \omega_3\right) \\ f_1(u) = p\left(\frac{u}{2}\right) + p\left(\frac{u}{2} + \omega_1\right) - p\left(\frac{u}{2} + \omega_2\right) - p\left(\frac{u}{2} + \omega_3\right) \\ f_2(u) = p\left(\frac{u}{2}\right) + p\left(\frac{u}{2} + \omega_2\right) - p\left(\frac{u}{2} + \omega_3\right) - p\left(\frac{u}{2} + \omega_1\right) \\ f_3(u) = p\left(\frac{u}{2}\right) + p\left(\frac{u}{2} + \omega_3\right) - p\left(\frac{u}{2} + \omega_1\right) - p\left(\frac{u}{2} + \omega_2\right). \end{cases}$$

Die Funktion $f_0(u)$ besitzt die Perioden $2\omega_1, 2\omega_3$. Sie wird im fundamentalen Periodenparallelogramm $(2\omega_1, 2\omega_3)$ nur

im Nullpunkt unendlich und zwar zur zweiten Ordnung. Für $u = 0$ ist

$$\lim\left[f_0(u) - \frac{4}{u^2}\right] = 0.$$

Hieraus folgt

$$f_0(u) = 4p(u). \tag{5}$$

Die Funktion $f_1(u)$ hat die Periodizitätseigenschaften

$$\begin{cases} f_1(u+2\omega_1) = f_1(u) \quad f_1(u+2\omega_2) = -f_1(u) \\ \qquad\qquad f_1(u+2\omega_3) = -f_1(u). \end{cases} \tag{6}$$

Im fundamentalen Periodenparallelogramm $(2\omega_1, 2\omega_3)$ wird die Funktion $f_1(u)$ nur im Nullpunkt unendlich und zwar zur zweiten Ordnung. In den Punkten ω_2, ω_3 verschwindet sie zur ersten Ordnung. Das Produkt der beiden Funktionen

$$\sqrt{p(u) - e_2} = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)} \quad \text{und} \quad \sqrt{p(u) - e_3} = \frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)} \quad (\S\ 54,\ \text{N.}\ 9)$$

besitzt dieselben Periodizitätseigenschaften (6) (s. § 55, Nr. 4), dieselben einfachen Nullpunkte und denselben Unstetigkeitspunkt zweiter Ordnung. Dieses Produkt unterscheidet sich daher von $f_1(u)$ nur um einen konstanten Faktor, der sich aus der Bedingung

$$\lim_{u=0} \frac{u^2}{4} f_1(u) = 1$$

ergibt. Wir erhalten

$$f_1(u) = 4\sqrt{p(u) - e_2}\sqrt{p(u) - e_3}. \tag{7}$$

Analog ergibt sich

$$f_2(u) = 4\sqrt{p(u) - e_3}\sqrt{p(u) - e_1}, \tag{8}$$

$$f_3(u) = 4\sqrt{p(u) - e_1}\sqrt{p(u) - e_2}. \tag{9}$$

Substituieren wir die Werte (5), (7), (8) und (9) in (4) und addieren wir dann diese Gleichungen, so ergibt sich

$$p\left(\frac{u}{2}\right) = p(u) + \sqrt{p(u) - e_2} \cdot \sqrt{p(u) - e_3} \\ + \sqrt{p(u) - e_3} \cdot \sqrt{p(u) - e_1} + \sqrt{p(u) - e_1} \cdot \sqrt{p(u) - e_2}.$$

Die drei Quadratwurzeln genügen der Gleichung

$$p'(u) = -2\sqrt{p(u) - e_1} \cdot \sqrt{p(u) - e_2} \cdot \sqrt{p(u) - e_3}.$$

Es ist also, da wir $p'(u)$ als bekannt betrachten, eine derselben durch die beiden anderen bestimmt.

Die Teilung durch eine ungerade Primzahl n kann man in ähnlicher Weise durchführen: die Funktion $p\left(\frac{u}{n}\right)$ läßt sich rational durch die in § 54 eingeführten n^2-1 Funktionen $\Phi_{\lambda\mu}(u)$ und die Funktionen $p(u)$ und $p'(u)$ ausdrücken. Wir wollen hierauf nicht weiter eingehen.

§ 105. Die Teilung der Perioden. Bei unseren Betrachtungen über die Teilung des Arguments der p-Funktion haben wir die Größen

$$p\left(\frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right) \tag{1}$$

als rational bekannt betrachtet. Wir wollen uns nun mit der Gleichung beschäftigen, die diese Größen bestimmt. Bei dieser Untersuchung haben wir als rational bekannt zu betrachten

1. die rationalen Zahlen,
2. die Invarianten g_2 und g_3,

und wir wollen überdies

3. die n-ten Einheitswurzeln in den Rationalitätsbereich aufnehmen.

Die Teilung der Perioden durch eine zusammengesetzte Zahl kann — analog wie dies bei der Teilung des Arguments geschehen ist — durch die sukzessive Teilung derselben durch die Faktoren ersetzt werden. Wir können uns daher, den trivialen Fall $n=2$ bei Seite lassend, auf die Teilung der Perioden durch eine ungerade Primzahl n beschränken. Die Teilungsgleichung ergibt sich unmittelbar aus der Gleichung (24) des § 53. Setzen wir

$$u = \frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n},$$

so wird die Funktion $p(nu)$ unendlich, daraus folgt, daß die Größen (1) der Gleichung $\frac{1}{2}(n^2-1)$-ten Grades

$$G_{\frac{1}{2}(n^2-1)}(x) = 0 \tag{2}$$

genügen. Die Koeffizienten dieser Gleichung sind ganze Funktionen der Größen $\frac{1}{2}g_2$ und g_3 mit ganzzahligen Koeffizienten.

Für die Wurzeln (1) der Teilungsgleichung führen wir eine abkürzende Bezeichnung ein; wir setzen

(3) $$x_{\lambda\mu} = p\left(\frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right) \quad \begin{array}{l}\lambda, \mu \equiv 0, 1, 2, \cdots, n-1 \mod n, \\ \text{ausgenommen } \lambda \equiv 0 \quad \mu \equiv 0.\end{array}$$

Die Indizes λ, μ sind nur modulo n bestimmt. Weil die Funktion $p(u)$ gerade ist, ist

(4) $$x_{-\lambda-\mu} = x_{\lambda\mu}$$

zu setzen.

Es handelt sich nun vor allem darum, die Gruppe der Gleichung (2) zu bestimmen.

Die Größen g_2 und g_3 und folglich auch alle Größen des festgesetzten Rationalitätsbereiches bleiben ungeändert, wenn wir die Halbperioden ω_1, ω_3 durch die äquivalenten Halbperioden

(5) $$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3 \quad \omega_3' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3$$

ersetzen. Hier bedeuten $\alpha\beta\gamma\delta$ ganze Zahlen, die der Bedingung

(6) $$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügen. Die Substitution (5) bewirkt demnach eine Permutation der Wurzeln der Gleichung (2), die sicher in der Gruppe der Gleichung enthalten ist.

An Stelle der Wurzel $x_{\lambda\mu}$ tritt die Wurzel $x_{\lambda'\mu'}$, deren Indizes durch die Kongruenzen

(7) $$\pm\lambda' \equiv \alpha\lambda + \gamma\mu \quad \pm\mu' \equiv \beta\lambda + \delta\mu \mod n$$

bestimmt sind (vgl. (4)). Die Gesamtheit der Substitutionen, die durch derartige Kongruenzen charakterisiert sind, bildet eine Gruppe $\mathfrak{G}$ und es steht von vornherein fest, daß diese Gruppe entweder mit der Gruppe der Teilungsgleichung (2) identisch ist, oder daß sie eine Untergruppe derselben ist. Wir werden im § 107 nachweisen, daß der erstere Fall eintritt.

Für die Bestimmung der Indizes $\lambda'\mu'$ (7) kommen nur die Reste der Zahlen $\alpha\beta\gamma\delta$ modulo n in Betracht, und weil den Indizespaaren $\lambda'\mu'$ und $-\lambda' -\mu'$ dieselbe Wurzel entspricht (4), entspricht den Substitutionskoeffizienten

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}-\alpha & -\beta\\ -\gamma & -\delta\end{pmatrix}$$

dieselbe auf die Wurzeln bezügliche Substitution. Der Grad der Gruppe G ist demnach halb so groß als die Anzahl der verschiedenen Lösungen der Kongruenz

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \mod n. \tag{8}$$

Wenn wir α als nicht teilbar durch n annehmen, so können wir die Zahlen β und γ beliebig wählen; dieser Annahme entsprechen also $(n-1)n^2$ Lösungen der Kongruenz. Ist $\alpha \equiv 0$, so kann δ beliebig gewählt werden und die Wahl von β unterliegt nur der Beschränkung, daß β nicht durch n teilbar sein darf. Dieser Annahme entsprechen also $n(n-1)$ Lösungen der Kongruenz. Der Kongruenz (8) genügen also $n(n^2-1)$ inkongruente Zahlenquadrupel und der Grad der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist daher $\frac{1}{2}n(n^2-1)$.

Nehmen wir an, eine bestimmte Substitution der Gruppe $\mathfrak{G}$ ersetze die Wurzeln $x_{\lambda\mu}$, $x_{\varkappa\nu}$ durch $x_{\lambda'\mu'}$ bzw. durch $x_{\varkappa'\nu'}$. Es bestehen dann neben den Kongruenzen (7) die beiden Kongruenzen

$$\pm\varkappa' \equiv \alpha\varkappa + \gamma\nu \qquad \pm\nu' \equiv \beta\varkappa + \delta\nu \mod n. \tag{9}$$

Dabei ist zu bemerken, daß in jedem der beiden Kongruenzenpaare (7) und (9) gleichzeitig die oberen oder die unteren Zeichen gelten. Aus den vier Kongruenzen folgt mit Rücksicht auf (8)

$$\lambda'\nu' - \mu'\varkappa' \equiv \pm(\lambda\nu - \mu\varkappa) \mod n. \tag{10}$$

Nehmen wir nun umgekehrt an, es sei die eine der in (10) zusammengefaßten Kongruenzen erfüllt und nehmen wir weiter an, die Determinante $\lambda\nu - \mu\varkappa$ sei nicht durch n teilbar. Unter dieser Voraussetzung gibt es eine und nur eine Substitution der Gruppe $\mathfrak{G}$, die gleichzeitig die Wurzel $x_{\lambda\mu}$ durch $x_{\lambda'\mu'}$ und die Wurzel $x_{\varkappa\nu}$ durch $x_{\varkappa'\nu'}$ ersetzt.

Zum Beweis bestimmen wir die Zahlen $\alpha\beta\gamma\delta$ durch die Kongruenzen (7) und (9) und zwar wählen wir, wenn in (10) das obere Zeichen gilt, in den beiden Kongruenzenpaaren gleichzeitig die oberen oder die unteren Vorzeichen; wenn dagegen in (10) das untere Zeichen gilt, so wählen wir in einem der beiden Kongruenzenpaare das obere, in dem andern das

untere Vorzeichen. Auf Grund dieser Bestimmung zieht die Kongruenz (10) die Kongruenz (8) nach sich.

Wir heben einen Spezialfall hervor, von dem wir später Gebrauch machen werden: es gibt in der Gruppe $\mathfrak{G}$ eine Substitution, die gleichzeitig $x_{\lambda\mu}$ durch x_{10} und $x_{\varkappa\nu}$ durch $x_{0\nu'}$ ersetzt. Der Index ν' ist durch eine der beiden Kongruenzen

$$\pm \nu' \equiv \lambda\nu - \mu\varkappa \mod n$$

bestimmt.

Weil die Gruppe $\mathfrak{G}$ Substitutionen enthält, die die Wurzel $x_{\lambda\mu}$ durch eine beliebige andere Wurzel $x_{\lambda'\mu'}$ ersetzen, ist sie transitiv. Dasselbe gilt daher auch für die Gruppe der Teilungsgleichung. Die Teilungsgleichung ist demnach irreduzibel (§ 95).

Der Beweis, daß $\mathfrak{G}$ die Gruppe der Teilungsgleichung ist, stützt sich auf gewisse Relationen zwischen den Wurzeln der Teilungsgleichung, die Abel — allerdings in etwas anderer Form — angegeben hat. Diese Relationen wollen wir zunächst entwickeln.

§ 106. Die Abelschen Relationen.

Die Funktion

$$f_\alpha(u) = \frac{p(u) - e_\alpha}{p'(u)} \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{1}$$

wird nur in zwei Punkten des Periodenparallelogramms unendlich und zwar zur ersten Ordnung. Es sind das die Punkte ω_β und ω_γ; die Zahlen α, β, γ sind eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3. Den beiden Unstetigkeitspunkten entsprechen entgegengesetzt gleiche Residuen (§ 50). Die Funktion $f_\alpha(u)$ besitzt die Perioden $2\omega_1, 2\omega_3$ und sie genügt außerdem der Gleichung

$$f_\alpha(u + \omega_\alpha) = - f_\alpha(u). \tag{2}$$

Zum Beweis ist zu bemerken: die Summe $f_\alpha(u + \omega_\alpha) + f_\alpha(u)$ wird weder im Punkt ω_β noch im Punkt ω_γ unstetig, denn in diesen Punkten wird zwar jeder der Summanden zur ersten Ordnung unendlich, aber die Residuen derselben haben entgegengesetzt gleiche Werte. Die Summe wird also im Periodenparallelogramm nirgends unstetig und ist daher als doppelt

periodische Funktion konstant; da sie für $u = 0$ verschwindet, so ist sie identisch Null.

Wir setzen nun unter $\varkappa$ eine beliebige und unter n eine ungerade positive ganze Zahl verstehend

$$(3)\qquad F_\alpha(u) = \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{4\varkappa\nu\pi i}{n}} f_\alpha\left(u + \frac{2\nu\omega_1}{n}\right).$$

Das allgemeine Glied der rechts stehenden Summe bleibt ungeändert, wenn wir den Index ν um ein Multiplum der Zahl n vermehren. Wir können deshalb die Summation statt über die Indizes 0 bis $n-1$ über ein beliebiges vollständiges Restsystem nach dem Modul n erstrecken.

Die Funktion $F_\alpha(u)$ wird in den Punkten

$$\omega_\beta - \frac{2\nu\omega_1}{n} \text{ und } \omega_\gamma - \frac{2\nu\omega_1}{n} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

und in den homologen Punkten zur ersten Ordnung unendlich. Die Funktion $F_\alpha(u)$ besitzt ebenso wie die Funktion $f_\alpha(u)$ die Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$, sie genügt aber außerdem der Gleichung

$$(4)\qquad F_\alpha\left(u + \frac{2\omega_1}{n}\right) = e^{-\frac{4\varkappa\pi i}{n}} F_\alpha(u).$$

Der Beweis ergibt sich aus der Gleichung

$$e^{\frac{4\varkappa\pi i}{n}} F_\alpha\left(u + \frac{2\omega_1}{n}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} e^{\frac{4\varkappa\nu\pi i}{n}} f_\alpha\left(u + \frac{2\nu\omega_1}{n}\right) = F_\alpha(u).$$

Aus der Gleichung (3) ergibt sich mit Rücksicht auf (2)

$$e^{\frac{2\varkappa\pi i}{n}} F_1\left(u + \frac{\omega_1}{n}\right) = \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{2\varkappa(2\nu+1)\pi i}{n}} f_1\left(u + \frac{(2\nu+1)\omega_1}{n}\right)$$

$$= -\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{2\varkappa(2\nu+1)\pi i}{n}} f_1\left(u + \frac{(2\nu+1+n)\omega_1}{n}\right).$$

Weil die Zahl n nach Voraussetzung ungerade ist, ist

$$\lambda = \nu + \frac{n+1}{2}$$

eine ganze Zahl, folglich ist

$$e^{\frac{2\varkappa(2\nu+1)\pi i}{n}} = e^{\frac{4\varkappa\lambda\pi i}{n}}.$$

Die Zahlen ν und λ durchlaufen gleichzeitig ein vollständiges Restsystem nach dem Modul n. Folglich ist

$$e^{\frac{2\varkappa\pi i}{n}} F_1\left(u+\frac{\omega_1}{n}\right) = -\sum_{\lambda=0}^{n-1} e^{\frac{4\varkappa\lambda\pi i}{n}} f_1\left(u+\frac{2\lambda\omega_1}{n}\right) = -F_1(u).$$

Die Funktion $F_1(u)$ besitzt also die Periodizitätseigenschaften

$$(5)\quad F_1\left(u+\frac{\omega_1}{n}\right) = -e^{-\frac{2\varkappa\pi i}{n}} F_1(u) \quad F_1(u+2\omega_3) = F_1(u).$$

Die Funktion $F_1(u)$ kann demnach auch als elliptische Funktion zweiter Art mit den Perioden $\frac{\omega_1}{n}$, $2\omega_3$ aufgefaßt werden (§ 56); als solche besitzt sie in dem fundamentalen Periodenparallelogramm $\left(\frac{\omega_1}{n}, 2\omega_3\right)$ nur den einen Unstetigkeitspunkt $u = \omega_3$.

Aus den Gleichungen (2) und (4) folgt, daß die Funktion $F_2(u)$ den Gleichungen

$$(6)\quad F_2\left(u+\frac{2\omega_1}{n}\right) = e^{-\frac{4\varkappa\pi i}{n}} F_2(u) \quad F_2(u+\omega_2) = -F_2(u)$$

genügt. Die Funktion $F_2(u)$ ist demnach eine elliptische Funktion zweiter Art mit den Perioden $\frac{2\omega_1}{n}$, ω_2. In dem fundamentalen Periodenparallelogramm $\left(\frac{2\omega_1}{n}, \omega_2\right)$ liegt nur ein Unstetigkeitspunkt derselben, der Punkt $u = \frac{\omega_1}{n}$.

Aus den Gleichungen (2) und (4) folgt ferner, daß die Funktion $F_3(u)$ den Gleichungen

$$(7)\quad F_3\left(u+\frac{2\omega_1}{n}\right) = e^{-\frac{4\varkappa\pi i}{n}} F_3(u) \quad F(u+\omega_3) = -F_3(u)$$

genügt. Die Funktion $F_3(u)$ ist also eine elliptische Funktion zweiter Art mit den Perioden $\frac{2\omega_1}{n}$, ω_3. Im fundamentalen Periodenparallelogramm $\left(\frac{2\omega_1}{n}, 2\omega_3\right)$ wird sie nur im Punkt $\frac{\omega_1}{n}$ unstetig.

Die drei elliptischen Funktionen zweiter Art F_1, F_2, F_3 haben die Eigenschaft, daß ihre Periodizitätsfaktoren $2n$-te

Einheitswurzeln sind. Diese Eigenschaft führt sofort zur Bestimmung ihrer Nullpunkte.

Im § 54 haben wir uns mit einwertigen Funktionen der Variabeln u beschäftigt, von denen eine Potenz doppelt periodisch ist. Wir haben uns dabei auf Funktionen beschränkt, die nur in einem Punkt des fundamentalen Periodenparallelogramms unstetig werden, und angenommen, daß der Unstetigkeitspunkt in den Nullpunkt falle. Wir haben bewiesen, daß eine derartige Funktion auch nur in einem Punkt v des Periodenparallelogramms verschwindet. Damit die $2n$-te Potenz der Funktion die Perioden $2\omega_1'$, $2\omega_3'$ besitzt, muß v einer Gleichung der Form

$$(8) \qquad v = \frac{\lambda\omega_1' + \mu\omega_3'}{n}$$

genügen, wo λ, μ beliebige ganze Zahlen bedeuten (§ 54, Nr. 4; in dieser Gleichung ist n durch $2n$ zu ersetzen). Die einem bestimmten Zahlenpaar λ, μ entsprechende Funktion haben wir mit $\Phi_{\lambda\mu}(u)$ bezeichnet. Sie hat die Periodizitätseigenschaften (§ 54, Nr. 7)

$$(9) \quad \Phi_{\lambda\mu}(u + 2\omega_1') = e^{-\frac{\mu\pi i}{n}}\,\Phi_{\lambda\mu}(u) \quad \Phi_{\lambda\mu}(u + 2\omega_3') = e^{\frac{\lambda\pi i}{n}}\,\Phi_{\lambda\mu}(u).$$

Die Funktion $\Phi_{\lambda\mu}(u - a)$ besitzt dieselben Periodizitätseigenschaften. Zwischen ihrem Unstetigkeitspunkt a und ihrem Nullpunkt $b = v + a$ besteht die Beziehung (8)

$$(10) \qquad b - a = \frac{\lambda\omega_1' + \mu\omega_3'}{n}.$$

Um die Funktion $\Phi_{\lambda\mu}(u)$ mit der Funktion $F_1(u)$ zu identifizieren, müssen wir setzen (vgl. (5) u. (9))

$$\omega_1' = \frac{\omega_1}{2n} \quad \omega_3' = \omega_3 \quad \mu = 2\varkappa - n \quad \lambda = 0 \quad a = \omega_3 = \omega_3'.$$

Aus (10) folgt

$$(11) \qquad b = \frac{2\varkappa\omega_3}{n}.$$

Um zur Funktion $F_2(u)$ zu gelangen, setzen wir (vgl. (6) und (9))

$$\omega_1' = \frac{\omega_1}{n} \quad \omega_3' = \frac{\omega_2}{2} \quad \mu = 4\varkappa \quad \lambda = -(2\varkappa + 1)n \quad a = \frac{\omega_1}{n}.$$

Wir erhalten (10) für den Nullpunkt b wieder dieselbe Gleichung (11).

Um zur Funktion $F_3(u)$ zu gelangen, setzen wir (vgl. (7) und (9))

$$\omega_1' = \frac{\omega_1}{n} \quad \omega_3' = \frac{\omega_3}{2} \quad \mu = 4\varkappa \quad \lambda = -n \quad a = \frac{\omega_1}{n}.$$

Die Gleichung (10) ergibt auch in diesem Fall wieder denselben Nullpunkt (11). Die drei Funktionen F_1, F_2, F_3 besitzen daher denselben Nullpunkt (11) und alle gemeinsamen Nullpunkte der drei Funktionen lassen sich in der Form

$$\frac{2\varkappa\omega_3}{n} + 2\alpha\frac{\omega_1}{n} + 2\beta\omega_3$$

darstellen, wo α, β ganze Zahlen bedeuten.

Ein gemeinschaftlicher Nullpunkt der drei Funktionen $F_1 F_2 F_3$ (3) ist auch Nullpunkt der beiden Funktionen

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{e^{\frac{4\varkappa\nu\pi i}{n}}}{p'\left(u+\frac{2\nu\omega_1}{n}\right)} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{e^{\frac{4\varkappa\nu\pi i}{n}} p\left(u+\frac{2\nu\omega_1}{n}\right)}{p'\left(u+\frac{2\nu\omega_1}{n}\right)}$$

und vice versa. Folglich bestehen für jede Zahl $\varkappa$ die Gleichungen

$$(12)\quad \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{e^{4\varkappa\nu\pi i}}{p'\left(\frac{2\nu\omega_1+2\varkappa\omega_3}{n}\right)} = 0 \text{ und } \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{e^{4\varkappa\nu\pi i} p\left(\frac{2\nu\omega_1+2\varkappa\omega_3}{n}\right)}{p'\left(\frac{2\nu\omega_1+2\varkappa\omega_3}{n}\right)} = 0.$$

Dagegen können, wenn die Zahlen λ und $\varkappa$ nicht modulo n kongruent sind, nicht gleichzeitig die beiden Ausdrücke

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{e^{4\varkappa\nu\pi i}}{p'\left(\frac{2\nu\omega_1+2\lambda\omega_3}{n}\right)} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{e^{\frac{4\varkappa\nu\pi i}{n}} p\left(\frac{2\nu\omega_1+2\lambda\omega_3}{n}\right)}{p'\left(\frac{2\nu\omega_1+2\lambda\omega_3}{n}\right)}$$

verschwinden.

Den Inhalt der Gleichungen (12) bezeichnet man als Abelsche Relationen. Man kann aus den angegebenen Gleichungen weitere ableiten, indem man das Periodenpaar $2\omega_1$, $2\omega_3$ durch ein äquivalentes Periodenpaar ersetzt. Wir gehen darauf nicht

weiter ein, weil die Relationen (12) für unsere Zwecke ausreichen.

§ 107. Beweis, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ die Gruppe der Teilungsgleichung ist. Weitere Relationen zwischen den Wurzeln der Teilungsgleichung ergeben sich aus dem Multiplikationstheorem und dem Additionstheorem der p-Funktion. Wir setzen zur Abkürzung

$$x'_{\lambda\mu} = p'\left(\frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right).$$

Zwischen den Größen $x_{\lambda\mu}$ und $x'_{\lambda\mu}$ besteht die Beziehung

$$x'^2_{\lambda\mu} = 4x^3_{\lambda\mu} - g_2 x_{\lambda\mu} - g_3. \tag{1}$$

Auf Grund des Multiplikationstheorems der p-Funktion (§ 53) ist, wenn α eine beliebige ganze Zahl bedeutet

$$p(\alpha u) = R_\alpha(p(u)).$$

R_α bedeutet eine rationale Funktion des angezeigten Arguments, deren Koeffizienten dem festgesetzten Rationalitätsbereich angehören. Aus dieser Gleichung folgt

$$p'(\alpha u) = \frac{1}{\alpha}\, R'(p(u))p'(u).$$

Folglich ist

$$x_{\alpha\lambda,\,\alpha\mu} = R_\alpha(x_{\lambda\mu}) \tag{2}$$

und

$$x'_{\alpha\lambda,\alpha\mu} = \frac{1}{\alpha}\, R'(x_{\lambda\mu})x'_{\lambda\mu}. \tag{3}$$

Das Additionstheorem der p-Funktion können wir in der Form schreiben

$$p(u+v) = A(p(u), p(v)) + B(p(u), p(v))p'(u)p'(v) \quad (\S\ 52,\ \text{Nr. } 8).$$

Hier bedeuten A, B rationale Funktionen der angezeigten Argumente, deren Koeffizienten dem festgesetzten Rationalitätsbereich angehören. Aus dieser Gleichung folgt

$$x_{\lambda+\varkappa,\,\mu+\nu} = A(x_{\lambda\mu}, x_{\varkappa\nu}) + B(x_{\lambda\mu}, x_{\varkappa\nu})x'_{\lambda\mu}x'_{\varkappa\nu}. \tag{4}$$

Wir ersetzen die Indizes λ, μ bzw. durch $\alpha\lambda$, $\alpha\mu$ und die Indizes $\varkappa$, ν bzw. durch $\beta\varkappa$, $\beta\nu$ und erhalten

$$\begin{cases} x_{\alpha\lambda+\beta\varkappa,\,\alpha\mu+\beta\nu} = A(x_{\alpha\lambda,\,\alpha\mu}, x_{\beta\varkappa,\,\beta\nu}) \\ \qquad\qquad + B(x_{\alpha\lambda,\,\alpha\mu}, x_{\beta\varkappa,\,\beta\nu})x'_{\alpha\lambda,\alpha\mu}x'_{\beta\varkappa,\,\beta\nu}. \end{cases} \tag{5}$$

Wegen (2) ist

$$x_{\alpha\lambda,\,\alpha\mu} = R_\alpha(x_{\lambda\mu}) \quad \text{und} \quad x_{\beta\varkappa,\,\beta\nu} = R_\beta(x_{\varkappa\nu})$$

und wegen (3) ist

$$x'_{\alpha\lambda,\,\alpha\mu} x'_{\beta\varkappa,\,\beta\nu} = \frac{1}{\alpha\beta} R_\alpha'(x_{\lambda\mu}) R_\beta'(x_{\varkappa\nu}) x'_{\lambda\mu} x'_{\varkappa\nu}.$$

Zufolge (4) können wir das Produkt $x'_{\lambda\mu} x'_{\varkappa\nu}$ rational durch die Größen $x_{\lambda\mu}$, $x_{\varkappa\nu}$ und $x_{\lambda+\varkappa,\,\mu+\nu}$ ausdrücken. Substituieren wir die angegebenen Ausdrücke in (5), so erhalten wir eine Gleichung der Form

$$x_{\alpha\lambda+\beta\varkappa,\,\alpha\mu+\beta\nu} = P_{\alpha\beta}(x_{\lambda\mu}, x_{\varkappa\nu}, x_{\lambda+\varkappa,\,\mu+\nu}). \tag{6}$$

Hier bedeutet $P_{\alpha\beta}$ eine rationale Funktion der angezeigten Argumente, deren Koeffizienten unserem Rationalitätsbereich angehören.

Es sei nun U eine beliebige Substitution, die der Gruppe der Teilungsgleichung angehört. Diese Substitution ersetze die Wurzeln x_{10}, x_{01} durch die Wurzeln $x_{\lambda\mu}$ bzw. $x_{\varkappa\nu}$. Die Determinante $\lambda\nu - \mu\varkappa$ ist nicht durch n teilbar. Zum Beweis ist zu bemerken: die Indizes λ und μ können nicht beide durch n teilbar sein, folglich gibt es, wenn die Determinante durch n teilbar ist, eine Zahl ϱ, die den beiden Kongruenzen

$$\varrho\lambda \equiv \varkappa \quad \varrho\mu \equiv \nu \quad \mod n$$

genügt. Folglich ist (2)

$$x_{\varkappa\nu} = R_\varrho(x_{\lambda\mu}).$$

Die zur Substitution U inverse Substitution ersetzt $x_{\lambda\mu}$ durch x_{10}, also $x_{\varkappa\nu}$ durch

$$R_\varrho(x_{10}) = x_{\varrho 0}$$

und dies widerspricht unserer Annahme, daß die Substitution U $x_{\varkappa\nu}$ an Stelle von x_{01} treten läßt.

Weil die Determinante $\lambda\nu - \mu\varkappa$ nicht durch n teilbar ist, gibt es in der Gruppe $\mathfrak{G}$ eine Substitution V, die $x_{\lambda\mu}$ durch x_{10} und $x_{\varkappa\nu}$ durch $x_{0\beta}$ ersetzt. Die Zahl β ist durch die Kongruenz

$$\pm\beta \equiv \lambda\nu - \mu\varkappa \mod n$$

bestimmt (§ 105 Schluß). Das Vorzeichen von β können wir nach Belieben wählen (vgl. § 105, Nr. 4). Wir werden sofort darüber verfügen.

Weil die Gruppe $\mathfrak{G}$ in der Gruppe der Teilungsgleichung enthalten ist, gehört dieser Gruppe auch die Substitution

$$W = UV \tag{7}$$

an. Diese Substitution läßt die Wurzel x_{10} auf ihrem Platz und ersetzt x_{01} durch $x_{0\beta}$. Wegen (1) muß sie daher an Stelle des Produkts $x'_{10} x'_{01}$ entweder das Produkt $x'_{10} x'_{0\beta}$ oder das Produkt $- x'_{10} x'_{0\beta}$ treten lassen. Wenden wir die Substitution W auf die rechte Seite der Gleichung (4)

$$x_{11} = A(x_{10}, x_{01}) + B(x_{10}, x_{01}) x'_{10}\, x'_{01}$$

an, so geht dieselbe in

$$A(x_{10}, x_{0\beta}) \pm B(x_{10}, x_{0\beta}) x'_{10}\, x'_{0\beta} \tag{8}$$

über. Je nachdem das obere oder das untere Zeichen gilt, ist dieser Ausdruck $= x_{1\beta}$ oder $= x_{1,-\beta}$. Wir wollen nun das Vorzeichen von β, das bisher noch nicht fixiert ist, so wählen, daß in (8) das obere Zeichen gilt. Unter dieser Voraussetzung ersetzt die Substitution W die Wurzel x_{11} durch $x_{1\beta}$.

In der Gleichung (6) ersetzen wir nun die Buchstaben

$$\lambda \;\; \mu \;\; \varkappa \;\; \nu \;\; \alpha \;\; \beta$$

bzw. durch

$$1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \beta \;\; \lambda \;\; \mu.$$

Wir erhalten

$$x_{\lambda, \beta\mu} = R_{\lambda\mu}(x_{10}, x_{0\beta}, x_{1\beta}) \tag{9}$$

und speziell für $\beta = 1$

$$x_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu}(x_{10}, x_{01}, x_{11}). \tag{10}$$

Der Vergleich der Gleichungen (9) und (10) zeigt: die Substitution W, die die Wurzeln $x_{10} x_{01} x_{11}$ bzw. durch $x_{10} x_{0\beta} x_{1\beta}$ ersetzt, läßt an Stelle der Wurzel $x_{\lambda\mu}$ die Wurzel $x_{\lambda, \beta\mu}$ treten.

Bisher haben wir nur von den Relationen zwischen den Wurzeln Gebrauch gemacht, die sich aus den Gleichungen (2) und (4) ergeben. Um auch die Abelschen Relationen heranziehen zu können, müssen wir zunächst feststellen, welche Wirkung die Substitution W auf die Größe $x'_{\lambda\mu}$ ausübt. Da ist von vornherein klar, daß an Stelle von $x'_{\lambda\mu}$ entweder $x'_{\lambda, \beta\mu}$ oder $- x'_{\lambda, \beta\mu}$ treten muß (1).

Wir setzen in (4)

$$\varkappa = 1 \quad \nu = 0$$

und erhalten

$$x_{\lambda+1,\mu} = A(x_{\lambda\mu}, x_{10}) + B(x_{\lambda\mu}, x_{10})\, x'_{\lambda\mu} x'_{10}.$$

Wenden wir die Substitution W an, so folgt

$$x_{\lambda+1,\beta\mu} = A(x_{\lambda,\beta\mu}, x_{10}) \pm B(x_{\lambda,\beta\mu}, x_{10})\, x'_{\lambda,\beta\mu} x'_{10}.$$

Diese Gleichung ist nur richtig, wenn das obere Zeichen gilt. Es wird also das Produkt $x'_{10} x'_{\lambda\mu}$ durch $x'_{10} x'_{\lambda,\beta\mu}$ ersetzt. An Stelle der Größe $x'_{\lambda\mu}$ tritt also, je nachdem x'_{10} ungeändert bleibt oder sein Vorzeichen wechselt, $x'_{\lambda,\beta\mu}$ oder $-x'_{\lambda,\beta\mu}$.

Wir wenden nun die Substitution W auf die Abelschen Relationen

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{e^{\frac{4\lambda\mu\pi i}{n}}}{x'_{\lambda\mu}} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{e^{\frac{4\lambda\mu\pi i}{n}}\, x_{\lambda\mu}}{x'_{\lambda\mu}} = 0$$

an (Gleichung (12) des vorigen Paragraphen). Die rechten Seiten dieser Gleichungen gehen über in

$$\pm \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{e^{\frac{4\lambda\mu\pi i}{n}}}{x'_{\lambda,\beta\mu}} \quad \text{bzw.} \quad \pm \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{e^{\frac{4\lambda\mu\pi i}{n}}\, x_{\lambda,\beta\mu}}{x'_{\lambda,\beta\mu}}.$$

Diese Ausdrücke können nur dann beide verschwinden, wenn $\beta \equiv 1 \bmod n$ ist. In diesem Fall läßt die Substitution W alle Wurzeln ungeändert, es ist also (7)

$$UV = 1.$$

Weil die Substitution V der Gruppe 𝔊 angehört, gilt dasselbe für die Substitution U, die beliebig aus der Gruppe der Teilungsgleichung ausgewählt werden konnte.

Wir ziehen aus den vorausgehenden Entwicklungen noch eine Folgerung. Wenn die Teilungsgleichung aufgelöst ist, so muß man, um die Größe $x'_{10} = \wp'\left(\frac{2\omega_1}{n}\right)$ zu bestimmen, noch eine Quadratwurzel ausziehen. Die übrigen Größen $x'_{\lambda\mu}$ lassen sich rational durch die Größen $x_{\lambda\mu}$ und x'_{10} ausdrücken.

§ 108. Beweis, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ für $n > 3$ einfach ist. Wir haben im § 39 gezeigt, daß sich jede Substitution mit der Determinante 1

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3 \quad \omega_3' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3,$$

deren Koeffizienten ganze Zahlen sind, aus den drei Substitutionen

$$(1) \qquad \omega_1' = -\omega_1 \quad \omega_3' = -\omega_3,$$

$$(2) \qquad \omega_1' = \omega_3 \quad \omega_3' = -\omega_1,$$

$$(3) \qquad \omega_1' = \omega_1 \quad \omega_3' = \omega_1 + \omega_3$$

zusammensetzen läßt. Dieser Satz behält seine Geltung, wenn man die Substitutionskoeffizienten durch ihre Reste modulo n ersetzt.

Wenn man die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}^{*)}$$

als nicht verschieden betrachtet, so ist die Substitution (1) mit der identischen Substitution äquivalent und kann daher weggelassen werden.*) Die Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$ lassen sich demnach aus den Substitutionen

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

zusammensetzen.

Um zu beweisen, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ einfach ist, brauchen wir daher nur zu zeigen, daß eine ausgezeichnete Untergruppe Γ der Gruppe $\mathfrak{G}$ entweder die Substitutionen S und T enthält oder sich auf die identische Substitution reduziert.

Wir beweisen zunächst: enthält die Gruppe $\mathfrak{G}$ eine Substitution von höherer als der zweiten Ordnung, so enthält sie auch die Substitutionen S und T.

---

*) Eine Substitution (A) $\omega_1 = \alpha\omega_1' + \beta\omega_3' \quad \omega_3 = \gamma\omega_1' + \delta\omega_3'$ ist durch Angabe ihrer Koeffizienten vollständig bestimmt. Wir bezeichnen sie daher durch das Symbol $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ oder auch durch die symbolische Gleichung $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Wenn die Koeffizienten der Substitution

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

der Bedingung $\alpha + \delta \equiv 0 \bmod n$ genügen, so ist die inverse Substitution

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix} = A,$$

folglich ist die Substitution A von der zweiten Ordnung. Setzen wir also voraus, daß die Substitution A von höherer als der zweiten Ordnung ist, so ist die Summe $\alpha + \delta$ nicht durch n teilbar. Wir wollen überdies vorerst annehmen, daß auch der zweite Koeffizient β nicht durch n teilbar ist.

Nehmen wir nun an, die Substitution A gehöre einer ausgezeichneten Untergruppe Γ der Gruppe $\mathfrak{G}$ an. Dieser Untergruppe gehört auch die transformierte Substitution $S^{-\nu} A S^{\nu}$ (§ 91), folglich auch die Substitution

$$B = S^{-\nu} A S^{\nu} A = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

an. Nun ist

$$S^{-\nu} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma - \alpha\nu & \delta - \beta\nu \end{pmatrix}$$

und

$$S^{\nu} A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma + \alpha\nu & \delta + \beta\nu \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$\alpha' = \beta\gamma + \alpha^2 + \alpha\beta\nu, \tag{4}$$

$$\beta' = (\alpha + \delta)\beta + \beta^2\nu, \tag{5}$$

$$\gamma' = (\alpha + \delta)\gamma + (1 - \alpha^2)\nu - \alpha\beta\nu^2, \tag{6}$$

$$\delta' = \beta\gamma + \delta^2 - \alpha\beta\nu - \beta^2\nu^2. \tag{7}$$

Wir bestimmen nun ν durch die Kongruenz

$$\beta\nu \equiv -(\alpha + \delta) \quad \bmod n. \tag{8}$$

Zufolge unserer Voraussetzungen besitzt diese Kongruenz eine von Null verschiedene Wurzel. Aus (5) folgt nun

$$\beta' \equiv 0. \tag{9}$$

Aus (4) und (7) folgt mit Rücksicht auf (8)

$$\alpha' + \delta' \equiv \alpha^2 + \delta^2 + 2\beta\gamma - (\alpha + \delta)^2 \equiv -2. \tag{10}$$

Aus der Kongruenz

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' \equiv 1$$

folgt mit Rücksicht auf (9) und (10)

$$\alpha' \equiv \delta' \equiv -1. \tag{11}$$

Aus (6) folgt mit Rücksicht auf (8)

$$\beta\gamma' \equiv (\alpha + \delta)[\beta\gamma - (1 - \alpha^2) - \alpha(\alpha + \delta)] \equiv -2(\alpha + \delta).$$

Folglich ist γ' nicht durch n teilbar.

Wegen (9) und (11) ist

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \gamma' & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma' & 1 \end{pmatrix}$$

und hieraus folgt

$$B^\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma'\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir λ so, daß $\gamma'\lambda \equiv -1$ ist, so ist $B^\lambda = S$. Die Gruppe Γ enthält demnach die Substitution S. Als ausgezeichnete Untergruppe enthält sie auch die Substitution

$$C = T^{-1}ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und folglich auch die Substitution

$$CS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Substitution

$$CSC = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T.$$

Die Gruppe Γ enthält also auch die Substitution T.

Bei unserem Beweis haben wir außer der Voraussetzung, daß die Gruppe Γ eine Substitution A von höherer als der zweiten Ordnung enthält, auch noch die weitere Voraussetzung benutzt, daß der zweite Koeffizient β dieser Substitution nicht

durch n teilbar ist. Von dieser letzteren Voraussetzung können wir uns frei machen.

Nehmen wir an, die Gruppe Γ enthalte die Substitution

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

deren dritter Koeffizient γ nicht verschwindet, so enthält sie als ausgezeichnete Untergruppe auch die transformierte Substitution

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

deren zweiter Koeffizient nicht verschwindet.

Enthält die Gruppe Γ die Substitution

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

so enthält sie auch die Substitution

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \delta - \alpha \\ 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Der zweite Koeffizient dieser Substitution kann nicht verschwinden.

Denn aus den Kongruenzen

$$\alpha\delta \equiv 1 \qquad \delta - \alpha \equiv 0$$

würde $\alpha \equiv \delta \equiv \pm 1$ folgen. Die Substitution A würde sich also auf die identische Substitution reduzieren, entgegen unserer Voraussetzung.

Nunmehr ist bewiesen: enthält die ausgezeichnete Untergruppe Γ eine Substitution von höherer als der zweiten Ordnung, so enthält sie die Substitutionen S und T, also alle Substitutionen der Gruppe 𝔊, ist also keine Untergruppe im eigentlichen Sinn des Worts.

Wir nehmen nun an, die Gruppe Γ enthalte außer der identischen Substitution nur Substitutionen zweiter Ordnung. Diese genügen, wie oben gezeigt worden ist, der Bedingung, daß die Summe des ersten und vierten Substitutionskoeffizienten durch n teilbar ist.

Wie soeben nachgewiesen wurde, enthält die Gruppe Γ, wenn sie sich nicht auf die identische Substitution reduziert, eine Substitution

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix},$$

deren zweiter Koeffizient β nicht verschwindet. Für die Koeffizienten der ebenfalls in Γ enthaltenen Substitution

$$B = S^{-\nu} A S^{\nu} A = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

gelten in diesem Fall, weil $\alpha^2 + \beta\gamma \equiv -1$ ist, die Kongruenzen (vgl. (4) bis (7))

$$\alpha' \equiv -1 + \alpha\beta\nu, \tag{12}$$

$$\beta' \equiv \beta^2\nu, \tag{13}$$

$$\delta' \equiv -(1 + \alpha\beta\nu + \beta^2\nu^2). \tag{14}$$

Die Kongruenz (13) zeigt, daß die Substitution B von der identischen verschieden ist. Sie muß daher von der Ordnung zwei sein und es ist folglich ((12) und (14))

$$\alpha' + \delta' \equiv 0 \equiv -2 - \beta^2\nu^2.$$

Diese Kongruenz besitzt höchstens zwei inkongruente Wurzeln. Wir können deshalb, wenn $n > 3$ ist, eine durch n nicht teilbare Zahl ν so wählen, daß die Kongruenz nicht erfüllt ist, und unsere Annahme führt daher in diesem Fall zu einem Widerspruch. Dieser Widerspruch tritt nicht ein, wenn $n = 3$ ist, denn das Quadrat jeder durch 3 nicht teilbaren Zahl ist $\equiv -2$. In der Tat bilden im Fall $n = 3$ die drei Substitutionen zweiter Ordnung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

zusammen mit der identischen Substitution eine ausgezeichnete Untergruppe der Gruppe 𝔊.

Die Gruppe 𝔊 der Gleichung, von der die Teilung der Perioden abhängt, ist einfach, wenn der Teiler n eine Primzahl > 3 ist.

§ 109. Resolventen der Teilungsgleichung. Die Auflösung der Teilungsgleichung

$$(1) \qquad G_{\frac{1}{2}(n^2-1)}(x) = 0$$

kann auf die Auflösung von Gleichungen niedrigeren Grades zurückgeführt werden. Unter diesen Resolventen gibt es aber keine von niedrigerem als dem n-ten Grad.

Zum Beweis bezeichnen wir mit φ_1 eine rationale, nicht symmetrische Funktion der Wurzeln der Gleichung (1), mit $\varphi_2 \varphi_3 \ldots \varphi_m$ die verschiedenen Werte, in die sie durch die Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$ übergeführt werden kann. Die Substitution n-ter Ordnung

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

kann nicht alle m Werte $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_m$ ungeändert lassen, denn sonst müßte sie einer ausgezeichneten Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{G}$ angehören (§ 92, Schluß). Eine derartige Untergruppe gibt es aber im Fall $n > 3$ überhaupt nicht; im Fall $n = 3$ gibt es zwar eine ausgezeichnete Untergruppe, aber diese enthält außer der identischen nur Substitutionen zweiter Ordnung (s. den Schluß des vorigen Paragraphen).

Es sei nun φ_ν eine Funktion, die bei Anwendung der Substitution S eine Änderung erfährt. Zwei verschiedene Potenzen dieser Substitution — S^λ und S^μ — können φ_ν nicht in denselben Wert $\varphi_\varkappa$ überführen, denn sonst würde die Substitution $S^{\lambda-\mu}$ die Funktion φ_ν ungeändert lassen und dasselbe würde für die verschiedenen Potenzen dieser Substitution, also auch für die Substitution S selbst gelten, entgegen unserer Voraussetzung. Unter den Werten $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_m$ müssen daher n verschiedene vorkommen, es ist also $m \geqq n$.

In den Fällen $n = 3, 5, 7, 11$ gibt es in der Tat Resolventen n-ten Grades; ist dagegen $n > 11$, so gibt es nur Resolventen von höherem als dem n-ten Grad.

Auf den Beweis dieses interessanten Satzes wollen wir nicht eingehen, sondern wir beschränken uns auf den Nachweis, daß es in jedem Fall Resolventen $n + 1$-ten Grades gibt.

Wir setzen, die im § 102 eingeführte Bezeichnungsweise wieder aufnehmend,

$$(2) \qquad a_\varrho = \frac{2\varrho\omega_1 + 2\omega_3}{n} \quad (\varrho = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \quad a_\infty = \frac{2\omega_1}{n}$$

und ordnen die $\frac{1}{2}(n^2 - 1)$ Wurzeln der Teilungsgleichung (1)

$$x_{\lambda\mu} = p\left(\frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right)$$

in $n + 1$ Reihen

$$(3) \qquad p(a_\varrho) \quad p(2a_\varrho) \cdots p\left(\frac{n-1}{2}a_\varrho\right) \quad (\varrho = 0, 1, 2, \cdots, n-1; \infty).$$

Eine Substitution der Gruppe $\mathfrak{G}$ ersetzt die beiden Wurzeln $x_{\lambda\mu}$, $x_{\varkappa\nu}$ durch zwei Wurzeln $x_{\lambda'\mu'}$, $x_{\varkappa'\nu'}$, deren Indizes einer der Kongruenzen

$$\lambda'\nu' - \mu'\varkappa' \equiv \pm\, \lambda\nu - \mu\varkappa \quad \bmod n$$

genügen (§ 105, Nr. 10). Gehören die beiden Wurzeln $x_{\lambda\mu}$ und $x_{\varkappa\nu}$ derselben Reihe (3) an, so ist $\lambda\nu - \mu\varkappa \equiv 0$ und es gehören folglich auch die beiden Wurzeln $x_{\lambda'\mu'}$ und $x_{\varkappa'\nu'}$ einer und derselben Reihe an. Die Reihen (3) werden demnach durch die Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$ nur untereinander vertauscht, aber nicht auseinander gerissen.

Wir bilden nun, unter R eine rationale symmetrische Funktion der angezeigten Argumente verstehend, die $n + 1$ Ausdrücke

$$(4) \qquad y_\varrho = R\left[p(a_\varrho), p(2a_\varrho), \cdots, p\left(\frac{n-1}{2}a_\varrho\right)\right]$$
$$(\varrho = 0, 1, 2, \cdots, n-1; \infty).$$

Durch die Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$ werden die $n + 1$ Größen y_ϱ nur untereinander vertauscht, sie genügen daher einer Gleichung $n + 1$-ten Grades

$$(5) \qquad F(y) = 0,$$

deren Koeffizienten unserem Rationalitätsbereich angehören. Die Gruppe dieser Gleichung ist mit der Gruppe G holoedrisch isomorph (vgl. § 95, S. 318). Wenn $n > 3$ ist, so folgt dies daraus, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ einfach ist. Im Fall $n = 3$ besitzt die Gruppe $\mathfrak{G}$ eine ausgezeichnete Untergruppe vierten Grades. Eine Funktion, die dieser Untergruppe gegenüber invariant

ist, genügt einer Gleichung dritten Grades, aber nicht der Gleichung (5), die im vorliegenden Fall vom vierten Grade ist.

Eine Substitution der Gruppe $\mathfrak{G}$, die die Wurzel $x_{\lambda\mu}$ durch die Wurzel $x_{\lambda'\mu'}$ ersetzt, läßt an Stelle der Wurzel y_ϱ der Resolvente (5), deren Index durch die Kongruenz

$$\lambda \equiv \varrho \mu \mod n$$

bestimmt ist, die Wurzel $y_{\varrho'}$ treten, deren Index der Kongruenz

$$\lambda' \equiv \varrho' \mu' \mod n$$

genügt. Ist $\mu = 0$, so ist $\varrho = \infty$ zu setzen und analog entspricht dem Index $\mu' = 0$ der Index $\varrho' = \infty$.

Setzen wir die vorstehenden Werte von λ und λ' in die Kongruenzen (vgl. § 105, Nr. 6 und 7)

$$\lambda' \equiv \alpha\lambda + \gamma\mu \quad \mu' \equiv \beta\lambda + \delta\mu \mod n$$

ein, so folgt

$$(6) \qquad \varrho' \equiv \frac{\alpha\varrho + \gamma}{\beta\varrho + \delta} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \mod n.$$

Damit haben wir eine sehr einfache und durchsichtige Darstellung für die Substitutionen der Gruppe der Resolvente (5) gewonnen. Diese Darstellung macht den Isomorphismus, der zwischen den Gruppen der Teilungsgleichung und der Resolvente besteht, augenfällig.

Damit die Substitution, die der Kongruenz (6) entspricht, die Wurzel y_ν ungeändert läßt, muß ν Wurzel der quadratischen Kongruenz

$$(7) \qquad \beta\nu^2 + (\delta - \alpha)\nu - \gamma \equiv 0 \mod n$$

sein. Diese Kongruenz besitzt zwei verschiedene Wurzeln oder gar keine, je nachdem die Zahl

$$(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma \equiv (\delta + \alpha)^2 - 4$$

für den Modul n quadratischer Rest ist oder nicht. Im Fall

$$\alpha + \delta \equiv \pm 2 \mod n$$

besitzt sie nur eine Wurzel.

Die Gruppe der Resolvente (5) enthält also Substitutionen, die zwei oder eine oder keine Wurzel ungeändert lassen. Soll

die Substitution mehr als zwei Wurzeln der Resolvente ungeändert lassen, so muß die Kongruenz (7) identisch erfüllt sein, d. h. alle ihre Koeffizienten müssen durch n teilbar sein. In diesem Fall ist

$$\alpha \equiv \delta \equiv \pm 1 \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0,$$

die Substitution ist also die identische. Außer der identischen gibt es demnach keine Substitution, die drei Wurzeln der Resolvente ungeändert läßt.

Daraus folgt:

Alle Wurzeln der Resolvente (5) lassen sich durch drei derselben rational ausdrücken (s. § 93).

Weil die Auflösung der Resolvente mit der Auflösung der Teilungsgleichung gleichbedeutend ist, so folgt hieraus weiter:

Alle Wurzeln der Teilungsgleichung lassen sich rational durch drei Wurzeln der Resolvente (5) ausdrücken.

Die Wurzeln der Resolvente (5) stehen in einer einfachen Beziehung zu den rationalen Transformationen n-ten Grades der p-Funktion.

Wir haben im § 102 die Halbperioden der Funktion $p(u)$ mit Ω_1, Ω_3, die der Funktion $p_\varrho(u)$ mit ω_1, ω_3 bezeichnet. Um die Übereinstimmung mit der in diesem Paragraphen gebrauchten Bezeichnung herzustellen, müssen wir die Buchstaben Ω_1, Ω_3 und ω_1, ω_3 vertauschen.

Die Koeffizienten der rationalen Funktion von $p(u)$, durch die wir die Funktion $p_\varrho(u)$ ausgedrückt haben (§ 102, Nr. 8), sind rationale, symmetrische Funktionen der Größen (3). Sie lassen sich daher rational durch die Wurzel y_ϱ der Resolvente (5) ausdrücken. Man bezeichnet deshalb diese Resolvente als „Transformationsgleichung“.

Die Invarianten $g_2^{(\varrho)}$, $g_3^{(\varrho)}$ der Funktion $p_\varrho(u)$ sind rationale Funktionen der Koeffizienten der Transformation, also auch rationale Funktionen von y_ϱ und dasselbe gilt von der absoluten Invariante (§ 5, Nr. 13)

$$J^{(\varrho)} = \frac{g_2^{(\varrho)3}}{g_2^{(\varrho)3} - 27 g_3^{(\varrho)2}}.$$

Es steht nichts im Weg, die $n+1$ Invarianten $I^{(\varrho)}$ an Stelle der $n+1$ Größen y_ϱ treten zu lassen. Diese Invarianten genügen demnach einer Gleichung $n+1$-ten Grades

$$F(I') = 0, \tag{8}$$

deren Koeffizienten rationale Funktionen der Invarianten g_2, g_3 der Funktion $p(u)$ sind.

Die Invariante $I^{(\varrho)}$ ist als Funktion der Perioden von $p_\varrho(u)$ betrachtet homogen vom Grade Null, sie ist daher auch eine homogene Funktion 0-ten Grades der Perioden $2\omega_1, 2\omega_3$ der Funktion $p(u)$. Dasselbe gilt daher auch für die Koeffizienten der Gleichung (8). Diese Koeffizienten können daher als rationale Funktionen der Invarianten g_2, g_3 nur von der absoluten Invariante

$$I = \frac{g_2{}^3}{g_2{}^3 - 27 g_3{}^2}$$

abhängen. Die Koeffizienten der Gleichung (8) sind demnach rationale Funktionen der Invariante I. Man bezeichnet deshalb diese Gleichung als „Invariantengleichung".

Weil die Gruppe der Teilungsgleichung — vom Fall $n = 3$ abgesehen — einfach ist, kann man den Grad dieser Gruppe nicht erniedrigen, indem man dem Rationalitätsbereich beliebige irrationale Funktionen der Invarianten g_2, g_3 adjungiert. Aber man gelangt bei passender Wahl der zu adjungierenden Irrationalitäten zu Resolventen von einfacherer Bauart. Der nächstliegende Gedanke ist, die Größen $e_1 e_2 e_3$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, das Quadrat des Moduls der Funktion $p(u)$

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$$

zu adjungieren und die Resolvente aufzustellen, der die Quadrate $\varkappa_\varrho{}^2$ der Moduln der Funktionen $p_\varrho(u)$ genügen. Als noch einfacher aber erweist sich die Beziehung, die zwischen den vierten Wurzeln $\sqrt[4]{k}$ und $\sqrt[4]{\varkappa_\varrho}$ besteht (vgl. § 63, Nr. 18 und 19).

Wir werden auf die Invariantengleichung noch ausführlicher zurückkommen.

§ 110. Komplexe Multiplikation. Damit sich die Funktion $p(u/\omega_1, \omega_3)$ rational durch die Funktion $p(u/\Omega_1, \Omega_3)$ ausdrücken läßt, ist, wie wir gesehen haben, notwendig und hinreichend, daß zwischen den Halbperioden Ω_1, Ω_3 und ω_1, ω_3 Gleichungen der Form

$$(1) \qquad \Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3 \qquad \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3$$

bestehen, wo $a\,b\,c\,d$ ganze Zahlen bedeuten. Ihre Determinante

$$(2) \qquad n = ad - bc$$

ist positiv. Wenn diese Determinante das Quadrat einer ganzen Zahl m ist, so genügen wir den Gleichungen (1) durch die Annahme

$$(3) \qquad a = d = m \qquad b = c = 0.$$

In diesem Fall ist

$$p(u/\omega_1, \omega_3) = p\left(u \middle| \frac{\Omega_1}{m}, \frac{\Omega_3}{m}\right) = m^2 p(mu/\Omega_1, \Omega_3)$$

und wir erhalten eine rationale Beziehung

$$(4) \qquad p(mu) = R(p(u)),$$

die man als Multiplikation der p-Funktion bezeichnet.

Es erhebt sich nun die Frage, ob eine rationale Beziehung der Form (4) auch dann bestehen kann, wenn m keine ganze rationale Zahl ist.

Die Existenz der Gleichung (4) zieht die Existenz von Gleichungen der Form

$$(5) \qquad m\omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3 \qquad m\omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3$$

nach sich und aus diesen ergibt sich durch Elimination von m

$$(6) \qquad b\omega_3^2 + (a - d)\omega_1\omega_3 - c\omega_1^2 = 0.$$

Wenn der Periodenquotient $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ als unabhängig variabel betrachtet wird, so folgen aus dieser Gleichung die Gleichungen (3); der Multiplikator m muß also eine ganze Zahl sein. Sind die Gleichungen (3) nicht erfüllt, so muß der Periodenquotient τ einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten genügen. Weil der imaginäre Teil von τ nicht verschwinden kann, muß diese Gleichung komplexe Wurzeln besitzen und es ist daher auch der Multiplikator

$$m = a + b\tau (5)$$

eine komplexe Größe. Man spricht deshalb in diesem Fall von einer „komplexen Multiplikation“ der $\wp$-Funktion.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die komplexe Multiplikation immer statthat, wenn der Periodenquotient Wurzel einer Gleichung von der angegebenen Art ist.

Nehmen wir an, die Halbperioden ω_1, ω_3 genügen der Gleichung

$$A\omega_3^2 + 2B\omega_1\omega_3 + C\omega_1^2 = 0. \tag{7}$$

Damit der Periodenquotient einen komplexen Wert besitzt muß die Determinante

$$D = B^2 - AC = -\Delta \tag{8}$$

negativ sein.

Die Koeffizienten A, B, C seien ganze Zahlen; wir wollen annehmen, daß sie keinen gemeinschaftlichen Divisor besitzen. Man bezeichnet unter dieser Voraussetzung die quadratische Form, die die linke Seite der Gleichung (7) bildet, nach Gauß Vorgang als „primitiv“, und zwar als primitiv von der ersten Art, wenn auch die Zahlen $A, 2B, C$ keinen gemeinschaftlichen Divisor besitzen, als primitiv von der zweiten Art, wenn die beiden Zahlen A und C gerade sind. Im letzteren Fall muß B ungerade, also

$$\Delta \equiv -1 \quad \mod 4$$

sein.

Um die Gleichung (7) mit der Gleichung (6) zu identifizieren, setzen wir im Fall der primitiven Form erster Art

$$b = xA \quad a - d = x \cdot 2B \quad -c = x \cdot C \quad a + d = 2y. \tag{9}$$

Hieraus folgt

$$a = y + Bx \qquad d = y - Bx \tag{10}$$

und mit Rücksicht auf (2) und (8)

$$n = ad - bc = y^2 + \Delta x^2. \tag{11}$$

Weil b, $a - d$, c ganze Zahlen sind, muß x ebenfalls eine ganze Zahl sein und aus (10) folgt, daß auch y eine ganze Zahl ist.

Im Fall der primitiven Form zweiter Art setzen wir

$$b = x \cdot \tfrac{1}{2}A \quad a - d = x \cdot B \quad -c = x \cdot \tfrac{1}{2}C \quad a + d = y \tag{12}$$

und erhalten

(13) $$a = \tfrac{1}{2}(y + Bx) \qquad d = \tfrac{1}{2}(y - Bx)$$
und
(14) $$4n = y^2 + \Delta x^2.$$
x, y bedeuten ganze Zahlen, die, wie aus (13) hervorgeht, gleichzeitig gerade oder ungerade sind.

Die Zahlen $x\,y$ können demnach im ersten Fall beliebig gewählt werden, im zweiten unterliegen sie nur der Beschränkung, daß sie gleichzeitig gerade oder ungerade sind. Jedem Zahlenpaar $x\,y$ entspricht eine bestimmtes System von Zahlen $a\,b\,c\,d$, das einen komplexen Multiplikator bestimmt.

Jeder Binärform mit negativer Determinante

$$A\omega_3^2 + 2B\omega_1\omega_3 + C\omega_1^2$$

entspricht demnach eine $\wp$-Funktion, die eine komplexe Multiplikation zuläßt.*) Führen wir an Stelle der Halbperioden ω_1, ω_3 die äquivalenten Halbperioden ω_1', ω_3' mittelst der Gleichungen ein

$$\omega_1 = \alpha\omega_1' + \beta\omega_3' \qquad \omega_3 = \gamma\omega_1' + \delta\omega_3' \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

so wird die Binärform in eine äquivalente Binärform

$$A'\omega_3'^2 + 2B'\omega_1'\omega_3' + C'\omega_1'^2$$

transformiert. Den beiden Binärformen entspricht dieselbe $\wp$-Funktion.

Es ist ein bekannter Fundamentalsatz der Theorie der quadratischen Formen, daß einem gegebenem Wert der Determinante D nur eine endliche Anzahl von Klassen nicht äquivalenter Formen entspricht.**) Einem gegebenen Wert von D entspricht demnach auch nur eine endliche Anzahl von verschiedenen $\wp$-Funktionen.

Wenn die Determinante $n = ad - bc = 1$ ist, so ist die rationale Funktion $R(4)$ vom ersten Grade (§ 100) und aus den Unstetigkeitsbedingungen

---

*) Wenn es sich darum handelt, die verschiedenen Typen von $\wp$-Funktionen zu untersuchen, die die komplexe Multiplikation zulassen, so sind $\wp$-Funktionen, denen derselbe Periodenquotient entspricht, als nicht wesentlich verschieden zu betrachten.

**) Vgl. etwa Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, § 64 und ff. (Dritte Auflage.)

$$\lim_{u=0}\left[p(u)-\frac{1}{u^2}\right]=0 \qquad \lim_{u=0}\left[p(mu)-\frac{1}{m^2u^2}\right]=0$$

folgt

(15) $$p(u)=m^2p(mu).$$

Der Gleichung (11) können wir im vorliegenden Fall nur genügen, indem wir entweder

$$x=0 \qquad y=\pm 1$$

oder

$$x=\pm 1 \quad y=0 \qquad \Delta=-D=1$$

setzen. Die erste Alternative ist auszuschließen, denn dieser Annahme entsprechen die Werte (9)

$$a=d=\pm 1 \qquad b=c=0 \qquad m=1.$$

Der Determinante $D=-1$ entspricht nur eine Formenklasse, die durch die Form

$$\omega_3^2+\omega_1^2$$

repräsentiert wird. Aus der zweiten Annahme folgt demnach

$$\omega_3=\omega_1 i \quad a=d=0 \quad b=-c=\pm 1 \quad m=a+b\frac{\omega_3}{\omega_1}=\pm i.$$

Die Gleichung (15) erhält die Form

$$p(u/\omega_1, i\omega_1)=-p(iu/\omega_1, i\omega_1)^{*}).$$

Der Gleichung (14) können wir — da die Annahme $x=0$ wieder auszuschließen ist — im Fall $n=1$ nur genügen, indem wir

$$x=\pm 1 \qquad y=\pm 1 \qquad \Delta=-D=3$$

setzen. Der Determinante $D=-3$ entspricht nur eine Klasse primitiver Formen zweiter Art, die durch die Form

$$2\omega_3^2-2\omega_1\omega_3+2\omega_1^2$$

repräsentiert wird. Wir erhalten in diesem Fall

$$\omega_3=e^{\frac{\pi i}{3}}\omega_1=\varepsilon\omega_1$$

und entweder

---

*) Um diese Gleichung zu verifizieren, braucht man nur zu bebemerken, daß für beliebige Werte von m

$$p(u/\omega_1, \omega_3)=m^2p(mu/-m\omega_3, m\omega_1)$$

ist.

$$a = \pm 1 \qquad c = -b = \pm 1 \qquad d = 0 \qquad m = \pm(1-\varepsilon) = \mp \varepsilon^2$$
$$(x = -y = \mp 1)$$

oder

$$a = 0 \quad c = -b = \mp 1 \quad d = \pm 1 \quad m = \pm \varepsilon \qquad (x = y = \pm 1).$$

Im ersten Fall erhalten wir

$$p(u/\omega_1, \varepsilon\omega_1) = -\varepsilon p(\varepsilon^2 u/\omega_1, \varepsilon\omega_1)$$

im zweiten Fall

$$p(u/\omega_1, \varepsilon\omega_1) = \varepsilon^2 p(\varepsilon u/\omega_1, \varepsilon\omega_1).$$

Im nächsten Abschnitt wird nachgewiesen, daß für $\omega_3 = i\omega_1$ $I = 1$ $g_3 = 0$ und für $\omega_3 = \varepsilon\omega_1$ $I = 0$ $g_2 = 0$ ist.

Die Theorie der komplexen Multiplikation steht im engsten Zusammenhang mit der Theorie der binären quadratischen Formen, von der die neuere Entwicklung der Zahlentheorie ihren Ausgang genommen hat. Wir können hier auf diese Theorie nicht weiter eingehen. Eine ausführliche Darstellung findet man in H. Webers Lehrbuch der elliptischen Funktionen; einen kurzen übersichtlichen Abriß gibt Bianchi in seinen Lezioni sulla teoria delle funzioni ellittiche.

Neunter Abschnitt.

Die Modulfunktionen.

§ 111. Die Perioden als Funktionen des Modulquadrats. Bisher haben wir die Perioden des Integrals erster Gattung als konstant angesehen. Um das Problem der Teilung der Perioden tiefer zu erfassen, wollen wir sie nunmehr als variabel betrachten.

Die Weierstraßschen Perioden

$$(1)\qquad 2\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{2\,dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} \quad \text{und} \quad 2\omega_3 = \int_{e_3}^{\infty} \frac{2\,dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

hängen von den beiden Invarianten g_2 und g_3 ab. Die Jacobischen Perioden

$$(2)\qquad 2K = \sqrt{e_1 - e_3} \cdot 2\omega_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2 x)}}$$

und

$$2iK' = \sqrt{e_1 - e_3} \cdot 2\omega_3 = i\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k'^2 x)}}$$

hängen nur von dem Quadrat des Moduls

$$(3)\qquad \lambda = k^2 \qquad \text{(vgl. § 8 Nr. 3)}$$

ab. Der Periodenquotient

$$(4)\qquad \tau = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{iK'}{K}$$

ist somit ebenfalls eine Funktion der einen Variabeln λ.

An Stelle dieser Variabeln λ werden wir später die Invariante

$$I = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2} = \frac{4}{27}\,\frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2} \qquad \text{(§ 5 Nr. 17)}$$

einführen und zuerst τ als Funktion von I und dann I als Funktion von τ untersuchen.

Um für diese Untersuchung eine Grundlage zu gewinnen, leiten wir zunächst eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ab, der die Perioden $2K, 2iK'$ als Funktionen der Variabeln λ genügen. Die Rechnung gestaltet sich am einfachsten, wenn wir an Stelle der Variabeln λ ihren reziproken Wert

$$\nu = \frac{1}{\lambda} \tag{5}$$

einführen. Wir setzen ferner

$$2K = \sqrt{\nu} \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(\nu - x)}} = \sqrt{\nu}\, V. \tag{6}$$

Den Integrationsweg nehmen wir geradlinig an und wir schließen den Fall aus, daß die Größe ν einen reellen Wert $\leqq 1$ annimmt. Unter dieser Voraussetzung ist die Differentiation unter dem Integralzeichen zulässig und wir erhalten

$$\frac{dV}{d\nu} = -\frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(\nu - x)^3}}. \tag{7}$$

Andererseits folgt aus der Identität

$$\frac{d\sqrt{\frac{x(1-x)}{\nu - x}}}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu - x}{x(1-x)}} + \frac{\frac{1}{2}\nu(1-\nu)}{\sqrt{x(1-x)(\nu - x)^3}}$$

die Gleichung

$$\nu(1-\nu) \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(\nu - x)^3}} = -\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{\nu - x}{x(1-x)}}\, dx.$$

Substituieren wir diesen Wert in (7), so folgt

$$\nu(1-\nu)\frac{dV}{d\nu} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{\nu - x}{x(1-x)}}\, dx$$

und hieraus folgt weiter mit Rücksicht auf (6)

$$\frac{d\left[\nu(1-\nu)\frac{dV}{d\nu}\right]}{d\nu} = \frac{1}{4} V$$

oder ausgerechnet

$$(8)\qquad \nu(1-\nu)\frac{d^2V}{d\nu^2}+(1-2\nu)\frac{dV}{d\nu}-\frac{1}{4}V=0.$$

Wir führen nun an Stelle der Variabeln ν und V wieder die Variabeln λ und K ein ((5) und (6)) und erhalten durch eine einfache Rechnung

$$(9)\qquad \lambda(1-\lambda)\frac{d^2K}{d\lambda^2}+(1-2\lambda)\frac{dK}{d\lambda}-\frac{1}{4}K=0.$$

Diese Differentialgleichung ändert ihre Form nicht, wenn wir an Stelle der Variabeln $\lambda=k^2$ die Variable $1-\lambda=k'^2$ treten lassen. Bei dieser Vertauschung tritt an Stelle der Größe K die Größe K'(2).

Demnach genügen die beiden Jacobischen Perioden $2K$ und $2iK'$ derselben linearen und homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Der Vergleich der Gleichungen (8) und (9) zeigt, daß die Differentialgleichung (9) auch dann ihre Form nicht ändert, wenn man gleichzeitig

$$\lambda \text{ durch } \frac{1}{\lambda} \quad\text{und}\quad K(\lambda) \quad\text{durch}\quad \sqrt{\lambda}K(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\nu}}K\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

(5) und (6)

ersetzt. Hält man diese Bemerkung mit der eben gemachten zusammen, so wird ersichtlich, daß der Gleichung (9) die folgenden sechs Funktionen genügen*)

$$(10)\qquad \begin{array}{ccc} K(\lambda) & \frac{1}{\sqrt{\lambda}}K\left(\frac{1}{\lambda}\right) & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}K\left(\frac{1}{1-\lambda}\right) \\ K(1-\lambda) & \frac{1}{\sqrt{\lambda}}K\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}K\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right). \end{array}$$

Die Argumente der K-Funktionen sind die Werte der Doppelverhältnisse von vier gegebenen Elementen (vgl. § 4 Nr. 4).

Die Differentialgleichung (9) besitzt drei singuläre Punkte, nämlich die Punkte $\lambda=0$, $\lambda=1$ und $\lambda=\infty$.**) Einen dieser drei Werte kann das Doppelverhältnis nur annehmen, wenn

*) Vgl. F. Th. § 72, Schluß.

**) Vgl. F. Th. § 66 und 67.

zwei von den vier Elementen, die es bestimmen, zusammenfallen (§ 4).

Um die Werte der Perioden $2K$ und $2iK'$ den Punkten der λ-Ebene eindeutig zuordnen zu können, führen wir in dieser Ebene längs der Achse der reellen Zahlen einen Schnitt von $+1$ bis $+\infty$ und einen Schnitt von 0 bis $-\infty$. Innerhalb der zerschnittenen Ebene — wir wollen sie mit E' bezeichnen — liegt kein singulärer Punkt der Differentialgleichung und ist deshalb jedes Integral derselben innerhalb der Fläche E' einwertig und stetig.*)

§ 112. Reihenentwicklungen der Perioden. Im § 68 haben wir Reihenentwicklungen für das Integral erster Gattung hergestellt, aus diesen ergeben sich sofort Reihenentwicklungen für die Jacobischen Perioden $2K$ und $2iK'$. Wir erhalten (§ 68, Nr. 8 und 9):

$$(1)\qquad K(\lambda) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^2 \lambda^n\right] = F(\lambda)$$

und dementsprechend

$$(2)\qquad K'(\lambda) = F(1-\lambda).$$

Die erste Reihe konvergiert, wenn $|\lambda| < 1$ ist, die zweite, wenn $|1-\lambda| < 1$ ist. Für $\lambda = 1$ divergiert die erste Reihe, für $\lambda = 0$ die zweite.

Um das Verhalten der Funktionen $K(\lambda)$ und $K'(\lambda)$ in der Umgebung der singulären Punkte beurteilen zu können, müssen wir Reihenentwicklungen herstellen, die in der Umgebung dieser Punkte konvergieren. Wir setzen

$$(3)\qquad G(\lambda) = -i\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^2 \times\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\lambda^n.$$

Auch diese Reihe konvergiert, wenn $|\lambda| < 1$ ist.

*) Vgl. F. Th. § 62 S. 304 und § 71 S. 357.

Man verifiziert leicht, daß die Funktion

$$(4) \qquad \Phi(\lambda) = G(\lambda) + \frac{\log \lambda}{2\pi i} F(\lambda)$$

derselben Differentialgleichung genügt wie die Funktionen $K(\lambda)$ und $K'(\lambda)$ (Nr. 9 des vorigen Paragraphen). Bezüglich der Herleitung der Reihe $G(\lambda)$ verweisen wir auf die §§ 70 und 72 des F. Th.*)

Weil zwischen drei Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung eine lineare Relation besteht, muß sich die Funktion $K'(\lambda)$ in der Umgebung des Nullpunktes in der Form

$$(5) \qquad K'(\lambda) = c_1 F(\lambda) + c_2 \Phi(\lambda)$$

darstellen lassen. Um die Konstanten c_1 und c_2 zu bestimmen, machen wir von der am Schluß des § 19 bewiesenen Grenzgleichung Gebrauch: wenn die Größe λ durch reelle Werte wachsend gegen 1 konvergiert, so ist

$$(6) \qquad \lim_{\lambda=1} \left[K(\lambda) - \log \frac{4}{\sqrt{1-\lambda}} \right] = 0.$$

Dementsprechend ist, wenn die Größe λ durch reelle Werte abnehmend gegen Null konvergiert

$$(7) \qquad \lim_{\lambda=0} \left[K'(\lambda) - \log \frac{4}{\sqrt{\lambda}} \right] = 0.$$

Die beiden in (6) und (7) vorkommenden Wurzeln sind positiv zu nehmen, den Logarithmen ist ihr reeller Wert beizulegen.

Aus den Gleichungen (5) und (7) folgt mit Rücksicht auf (1), (3) und (4)

$$c_1 \frac{\pi}{2} - \log 4 + \lim_{\lambda=0} \left(\frac{c_2 F(\lambda)}{2\pi i} + \frac{1}{2} \right) \log \lambda = 0$$

und hieraus

$$c_1 = \frac{4 \log 2}{\pi} \quad c_2 = -2i.$$

---

*) In der Bezeichnung haben wir hier aus leicht ersichtlichem Grund die Änderung vorgenommen, daß wir $\frac{\pi}{2} F(\lambda)$ und $\frac{\pi}{2} G(\lambda)$ an Stelle von $F(\lambda)$ und $G(\lambda)$ geschrieben haben.

Wir erhalten demnach

$$K'(\lambda) = -2iG(\lambda) + \frac{1}{\pi}\log\frac{16}{\lambda}F(\lambda) \tag{8}$$

und dementsprechend

$$K(\lambda) = -2iG(1-\lambda) + \frac{1}{\pi}\log\frac{16}{1-\lambda}F(1-\lambda). \tag{9}$$

Längs des Abschnittes 0, 1 der Abszissenachse sind den Logarithmen, die auf den rechten Seiten der Gleichungen (8) und (9) vorkommen, ihre reellen Werte beizulegen. Durch diese Festsetzung sind die Logarithmen für die ganze Fläche E' eindeutig bestimmt.

Die Darstellung (8) gilt innerhalb eines Kreises vom Radius 1 um den Nullpunkt, die Darstellung (9) innerhalb eines Kreises vom Radius 1 um den Punkt 1. Aus den Darstellungen (8) und (9) folgt, daß die Grenzgleichungen (6) und (7) nicht an die Bedingung gebunden sind, daß sich der Punkt λ auf einem bestimmten Weg dem Punkt 1 bzw. dem Punkt 0 nähert: sie gelten für beliebige Wege, vorausgesetzt daß die Werte der Logarithmen richtig definiert werden.

Bezeichnen wir mit $\bar{\lambda}$ einen Punkt der Begrenzung der Fläche E', der eine negative Abszisse besitzt und auf der Seite der abnehmenden Ordinaten liegt. Mit $\overset{+}{\lambda}$ bezeichnen wir den gegenüberliegenden Punkt auf der Seite der wachsenden Ordinaten.

Wenn der Punkt λ sich von der Stelle $\bar{\lambda}$ zu der Stelle $\overset{+}{\lambda}$ bewegt, ohne die Begrenzung der Fläche E' zu überschreiten, so kehren die Funktionen $F(\lambda)$ und $G(\lambda)$ zu ihren Anfangswerten zurück, der Logarithmus $\log\lambda$ wächst um $2\pi i$. Folglich ist.

$$K\left(\overset{+}{\lambda}\right) = K\left(\bar{\lambda}\right) \qquad (1)$$

$$K'\left(\overset{+}{\lambda}\right) = K'\left(\bar{\lambda}\right) - 2iK\left(\bar{\lambda}\right). \qquad (8)$$

Gehen wir von einem Punkt $\bar{\lambda}$ des Abschnittes 1, $+\infty$ der Abszissenachse, der auf der Seite der abnehmenden Ordinaten liegt, zum gegenüberliegenden Punkt $\overset{+}{\lambda}$ auf der Seite der zunehmenden Ordinaten über, ohne die Begrenzung der Fläche

E' zu überschreiten, so kehren die Funktionen $F(\lambda)$ und $G(\lambda)$ zu ihren Anfangswerten zurück, der Logarithmus $\log(1-\lambda)$ nimmt um $2\pi i$ ab. Folglich ist in diesem Fall

$$K'(\overset{+}{\lambda}) = K'(\overset{-}{\lambda}) \qquad (2)$$

$$K(\overset{+}{\lambda}) = K(\overset{-}{\lambda}) + 2iK'(\overset{-}{\lambda}). \qquad (9)$$

Das Verhalten der Perioden $2K, 2iK'$ längs der Begrenzung der Fläche E' wird somit durch die folgenden Gleichungen dargestellt:

Längs des Abschnittes $-\infty, 0$ der Abszissenachse ist

$$(10) \qquad 2K(\overset{+}{\lambda}) = 2K(\overset{-}{\lambda}) \qquad 2iK'(\overset{+}{\lambda}) = 4K(\overset{-}{\lambda}) + 2iK'(\overset{-}{\lambda}).$$

Längs des Abschnittes $1, +\infty$ der Abszissenachse ist

$$(11) \qquad 2K(\overset{+}{\lambda}) = 2K(\overset{-}{\lambda}) + 4iK(\overset{-}{\lambda}) \qquad 2iK'(\overset{+}{\lambda}) = 2iK'(\overset{-}{\lambda}).$$

Diese Gleichungen sind zunächst nur unter der Voraussetzung bewiesen, daß die Punkte $\overset{+}{\lambda}$ und $\overset{-}{\lambda}$ in das Konvergenzgebiet der benutzten Reihen fallen. Aus allgemeinen funktionentheoretischen Prinzipien folgt aber, daß sie längs der ganzen oben genannten Abszissenabschnitte gelten (vgl. F. Th., S. 232).

§ 113. Beziehungen zwischen den Integralen der Differentialgleichung der Perioden. Wir haben im vorausgehenden mehrfach von den Gleichungen

$$(1) \qquad K(1-\lambda) = K'(\lambda) \qquad K'(1-\lambda) = K(\lambda)$$

Gebrauch gemacht. Wir wollen nun eine Reihe von analogen Beziehungen zwischen den Integralen der Differentialgleichung der Perioden nachweisen. Dieser Differentialgleichung genügen auch die Funktionen

$$(2) \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,K\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,K'\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right). \qquad (\S\,111, \text{Nr. } 10)$$

Diese Funktionen müssen sich daher linear und homogen durch die Funktionen $K(\lambda)$ und $K'(\lambda)$ darstellen lassen. Um die Funktionen (2) eindeutig zu definieren, wollen wir festsetzen, die Wurzel $\sqrt{\lambda}$ sei längs des Abschnittes 0, 1 der Abszissenachse positiv.

Wie aus den Gleichungen (8) und (9) des vorigen Paragraphen hervorgeht, kann sich ein Integral unserer Differentialgleichung, das sich in der Umgebung des Punktes $\lambda = 1$ regulär verhält, nur um eine multiplikative Konstante von der Funktion $K'(\lambda)$ unterscheiden. Die erste der beiden Funktionen (2) genügt dieser Bedingung und sie nimmt — ebenso wie die Funktion $K'(\lambda)$ — für $\lambda = 1$ den Wert $\frac{\pi}{2}$ an. Folglich ist

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} K\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right) = K'(\lambda). \tag{3}$$

Umständlicher gestaltet sich die Darstellung der zweiten der beiden Funktionen (2). Wir gehen von dem Ansatz aus

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} K'\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right) = c_1 K(\lambda) + c_2 K'(\lambda) \tag{4}$$

und bilden die λ-Ebene mittelst der Transformation

$$\nu = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \qquad \lambda = \frac{1}{1 - \nu} \tag{5}$$

auf die ν-Ebene ab. Der Achse der reellen Zahlen in der λ-Ebene entspricht die Achse der reellen Zahlen in der ν-Ebene und der positiven λ-Halbebene entspricht die positive ν-Halbebene.

Wir beschränken den Punkt λ auf die positive Halbebene; dadurch erreichen wir, daß wir die Festsetzungen, durch die wir die Funktionen

$$K(\lambda) \quad K'(\lambda) \quad \sqrt{\lambda} \quad \sqrt{1-\lambda} \quad \log \lambda \quad \log(1-\lambda)$$

einwertig gemacht haben, ohne weiteres auch auf die entsprechenden Funktionen der Variabeln ν übertragen können.*) Es ist demnach unter $\log \nu$ derjenige Zweig der Funktion Logarithmus zu verstehen, der längs des Abschnittes 0, 1 der Abszissenachse reelle Werte besitzt.

Wenn der Punkt ν den Abschnitt 0, 1 der Abszissenachse durchläuft, so durchläuft der entsprechende Punkt λ den Ab-

*) Dies wäre nicht der Fall, wenn wir den Punkt λ die ganze Fläche E' durchlaufen ließen, weil die Abbildung der Fläche E' eine andere Begrenzung besitzt als diese. Bei der Abbildung mittelst der Funktion $\nu = 1 - \lambda$ tritt diese Schwierigkeit nicht auf.

schnitt $1, +\infty$ der Abszissenachse. Da die Logarithmen $\log\lambda$ und $\log(1-\lambda)$ längs des Abschnittes $0, 1$ der Abszissenachse reelle Werte besitzen, so ist längs des Abschnittes $1, +\infty$ $\log\lambda$ reell und der imaginäre Bestandteil von $\log(1-\lambda)$ ist $-\pi i$. Wir haben daher (5)

$$\log\nu = \log(1-\lambda) - \log\lambda + \pi i \tag{6}$$

zu setzen. Längs des Abschnittes $1, +\infty$ ist $\sqrt{\lambda}$ positiv, also ist

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{1-\nu}. \tag{7}$$

Nun folgt aus (4) mit Rücksicht auf (5), (6) und (7)

$$\lim_{\nu=0}\left[\sqrt{1-\nu}\,K'(\nu) - \log 4 + \frac{1}{2}\log\nu\right] = \lim_{\lambda=1}\left[c_1 K(\lambda) - \log 4 + \frac{1}{2}\log(1-\lambda) - \frac{1}{2}\log\lambda + \frac{1}{2}\pi i\right] + c_2\frac{\pi}{2}$$

und hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (6) und (7) des vorigen Paragraphen

$$c_1 = 1 \qquad c_2 = -i.$$

Wir substituieren diese Werte in (4) und erhalten

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}K'\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) = K(\lambda) - iK'(\lambda). \tag{8}$$

Die Gleichungen (3) und (8) erhalten eine bemerkenswerte Form, wenn wir den Periodenquotienten

$$\tau(\lambda) = \frac{iK'(\lambda)}{K(\lambda)}$$

einführen. Es ist nämlich

$$\frac{iK'\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)}{K\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)} = \frac{iK(\lambda)+K'(\lambda)}{K'(\lambda)},$$

also

$$\tau' = \tau\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) = \frac{\tau(\lambda)-1}{\tau(\lambda)}. \tag{9}$$

Zwischen den Variabeln λ und ν und den Variabeln τ und τ' besteht somit genau derselbe Zusammenhang.

Wenden wir die Substitutionen (5) und (9) zweimal nacheinander an, so erhalten wir einerseits

$$\nu = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \qquad \mu = \frac{\nu - 1}{\nu} = \frac{1}{1 - \lambda}$$

und andererseits

$$\tau' = \frac{\tau - 1}{\tau} \qquad \tau'' = \frac{\tau' - 1}{\tau'} = \frac{1}{1 - \tau}.$$

Es ist also

$$\tau\left(\frac{1}{1-\lambda}\right) = \frac{1}{1 - \tau(\lambda)}. \tag{10}$$

§ 114. Abbildung der λ-Ebene auf die τ-Ebene. Die Funktion $\tau(\lambda)$ verhält sich innerhalb der positiven λ-Halbebene überall regulär; sie vermittelt daher eine konforme Abbildung der positiven λ-Halbebene auf die τ-Ebene. Wir bestimmen zunächst die Begrenzung der Bildfläche.

Für den Abschnitt 0, 1 der Abszissenachse in der λ-Ebene gelten die Gleichungen (§ 112, Nr. 1 und 2)

$$\tau(\lambda) = \frac{iK'(\lambda)}{K(\lambda)} = i\,\frac{F(1-\lambda)}{F(\lambda)}. \tag{1}$$

Reellen positiven Werten der Variablen λ entsprechen reelle positive Werte der Reihensumme $F(\lambda)$. Der in Rede stehende Abschnitt der Abszissenachse der λ-Ebene wird somit auf den positiven Teil der Ordinatenachse in der τ-Ebene abgebildet. Wie aus den Gleichungen (8) und (9) des § 112 hervorgeht, entspricht dem Punkt $\lambda = 1$ der Punkt $\tau = 0$, dem Punkt $\lambda = 0$ der Punkt $\tau = \infty$.

Die Substitution

$$\nu = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \tag{2}$$

vertauscht die Punkte 1 0 ∞ zyklisch; sie bildet daher den Abschnitt 0, 1 der Abszissenachse auf den Abschnitt $-\infty$, 0 ab.

Die der Substitution (2) entsprechende Substitution (vgl. den Schluß des vorigen Paragraphen)

$$\tau' = \frac{\tau - 1}{\tau} \tag{3}$$

bildet die Ordinatenachse auf eine durch den Punkt 1 gehenden Parallele ab und zwar entspricht dem positiven Teil der Achse der in der positiven Halbebene liegende Teil der Parallelen.

Durch zweimalige Anwendung der Substitution (2) wird der Abschnitt 0, 1 der Abszissenachse in der λ-Ebene auf den

Abschnitt $1, +\infty$ abgebildet. Durch zweimalige Anwendung der Substitution (3) wird die Ordinatenachse in der τ-Ebene in einen zur Abszissenachse orthogonalen Kreis abgebildet; er geht durch die Punkte $1, 0$, die den Punkten $0, \infty$ bzw. entsprechen. Sein Mittelpunkt ist also der Punkt $\frac{1}{2}$, sein Radius $= \frac{1}{2}$. Dem positiven Teil der Ordinatenachse entspricht der in der positiven Halbebene liegende Halbkreis.

Mittelst der Funktion $\tau(\lambda)$ wird also die positive λ-Halbebene in ein Kreisbogendreieck D mit den Ecken $0\ 1\ \infty$ abgebildet, dessen Seiten zur Abszissenachse in der τ-Ebene orthogonal sind (Fig. 33). Diese Ecken entsprechen den Punkten $1\ \infty\ 0$ der λ-Ebene. Die Dreieckswinkel sind sämtlich $= 0$*).

Um ein Bild der ganzen Fläche E' zu erhalten, wenden wir das Spiegelungsprinzip an:**) wir spiegeln die positive λ-Halbebene an der Strecke $0, 1$ der Abszissenachse und dementsprechend das Dreieck D in der τ-Ebene an der positiven Ordinatenachse. Wir erhalten auf diese Weise eine Abbildung der negativen λ-Halbebene auf ein zum Dreieck D symmetrisches Dreieck D' (s. Fig. 33). Das Viereck P, das sich aus den beiden Dreiecken D und D' zusammensetzt, liefert ein Bild der ganzen Fläche E'.

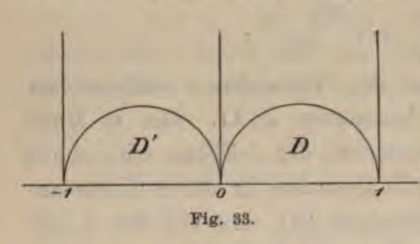


Fig. 33.

Um ein Bild der negativen λ-Halbebene zu erhalten, können wir das Dreieck D statt an der Seite $0, \infty$ auch an der Seite $1, \infty$ oder der Seite $0, 1$ spiegeln. Dem entsprechend haben wir die positive λ-Halbebene an dem Abschnitt $0, -\infty$ bzw. an dem Abschnitt $1, +\infty$ zu spiegeln. Die Vierecke, zu denen wir auf diese Weise kommen, sind Bilder der längs des Abschnitts $0, 1, +\infty$ bzw. des Abschnitts $1, 0, -\infty$ aufgeschnittenen λ-Ebene.

Durch wiederholte Spiegelung erhalten wir zwei unbegrenzte Reihen von Dreiecken $D D_1 D_2 \ldots, D' D_1' D_2' \ldots$. Jedes Drei-

---

*) Vgl. F. Th. § 77.

**) Vgl. F. Th. § 50.

eck der ersten Reihe ist ein Bild der positiven, jedes Dreieck der zweiten Reihe ein Bild der negativen λ-Halbebene.

Ein Dreieck D_i aus der ersten Reihe grenzt längs seiner Seiten an drei Dreiecke der zweiten Reihe. Mit einem derselben — es sei das Dreieck D_i' — hat es die Seite gemein, die dem Abschnitt 0, 1 der Abszissenachse in der λ-Ebene entspricht. Die beiden Dreiecke D_i und D_i' setzen sich zu einem Viereck P_i zusammen, das eine Abbildung der Fläche E' ist.

Wenn wir an einem Kreis C spiegeln, so entspricht jeder zu diesem Kreis orthogonale Kreis C' sich selbst und jedem zu C' orthogonalen Kreis entspricht daher ein ebenfalls zu C' orthogonaler Kreis. Einander entsprechende Punkte liegen auf derselben Seite des Kreises C'.

Weil die Seiten des Ausgangsdreiecks D zur Abszissenachse orthogonal sind, so gilt dasselbe für die Seiten aller Dreiecke, die wir durch wiederholte Spiegelung erhalten. Die Mittelpunkte der Kreise, denen die Seiten angehören, liegen also alle auf der Abszissenachse. Weil das Ausgangsdreieck D in der positiven τ-Halbebene liegt, so gilt dasselbe für alle Dreiecke D_i und D_i'.

Anstatt das Viereck P durch Spiegelung zu vervielfältigen, können wir auch einen anderen Weg einschlagen. Wir setzen die Funktion $\lambda(\tau)$, die in der Fläche E' eindeutig definiert ist, das Begrenzungsstück $-\infty, 0$ in der Richtung der abnehmenden Ordinaten überschreitend, analytisch fort. Bei dieser Fortsetzung werden den Punkten des Abschnitts $-\infty, 0$ der Abszissenachse, die auf der Seite der negativen Ordinaten liegen, anstatt der Werte

$$\bar{\tau} = \frac{iK'(\bar{\lambda})}{K(\bar{\lambda})} \qquad \text{(vgl. § 112)}$$

die Werte

$$\overset{+}{\tau} = \frac{iK'(\overset{+}{\lambda})}{K(\overset{+}{\lambda})} = \bar{\tau} + 2 \qquad \text{(§ 112, Nr. 10)}$$

zugeordnet. Setzen wir diese durch die ganze Fläche E' analytisch fort, so wird einem beliebigen Punkt λ statt des ursprünglichen Funktionswertes τ der Funktionswert

$$\tau' = \tau + 2 \tag{4}$$

zugeordnet. Wir erhalten somit eine neue Abbildung der Fläche E' auf ein Viereck P_1, das aus dem Viereck P durch die Translation (4) hervorgeht.

Wenn wir die analytische Fortsetzung über die Strecke $-\infty, 0$ hinweg statt in der Richtung der abnehmenden Ordinaten in der umgekehrten Richtung vornehmen, so tritt an Stelle der Substitution (4) die inverse Substitution

$$\tau' = \tau - 2.$$

Längs des Abschnitts $1, +\infty$ der Abszissenachse in der λ-Ebene besteht zwischen den Funktionswerten, die auf der Seite der wachsenden und der abnehmenden Ordinaten stattfinden, die Beziehung

$$\ddagger = \frac{\bar{\tau}}{2\bar{\tau}+1} \qquad (\S\ 112,\ \text{Nr. } 11).$$

Daraus schließen wir: setzen wir die Funktion $\tau(\lambda)$ analytisch fort, indem wir die Strecke $1, +\infty$ der Abszissenachse in der Richtung der abnehmenden Ordinaten überschreiten, so erhalten wir eine neue Abbildung der Fläche E' auf ein Viereck P_2 in der τ-Ebene, das aus dem Viereck P durch die Transformation ersten Grades

$$\tau' = \frac{\tau}{2\tau+1} \tag{5}$$

hervorgeht.

Die Translation (4) kann, wie man sich leicht überzeugt, aus einer Spiegelung an der Ordinate durch den Punkt -1 und einer Spiegelung an der Ordinate durch den Punkt 1 zusammengesetzt werden.

Analog kann die Transformation (5) aus einer Spiegelung an der Ordinatenachse und einer Spiegelung an dem Kreis durch die Punkte 0, 1 zusammengesetzt werden. Bezeichnen wir nämlich mit $\tau_0\ \tau_0'\ \tau_0''$ die zu den Größen $\tau\ \tau'\ \tau''$ konjugiert imaginären Größen, so werden diese Spiegelungen durch die Gleichungen

$$\tau + \tau_0'' = 0 \quad \text{und} \quad (\tau' - \tfrac{1}{2})(\tau_0'' - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{4} = 0$$

dargestellt, Durch Elimination von τ_0'' ergibt sich die Gleichung (5).

Durch wiederholte Anwendung der Substitutionen (4) und (5) erhalten wir wieder die vorhin durch wiederholte Spiege-

lungen hergestellte Bedeckung der positiven λ-Halbebene durch die Vierecke $P\,P_1\,P_2\ldots$.

Einem gegebenen Punkt in der positiven τ-Halbebene entspricht nur ein Punkt in der Fläche E', einem gegebenen Punkte in der Fläche E' entsprechen aber unendlich viele Punkte in der positiven τ-Halbebene, nämlich je einer in jedem der Vierecke $P\,P_1\,P_2\ldots$. Es ist daher τ als Funktion der Variabeln λ betrachtet eine unendlich vieldeutige Funktion, dagegen ist λ als Funktion der Variabeln τ betrachtet eine einwertige Funktion.

Diese Funktion $\lambda(\tau)$ ändert ihren Wert nicht, wenn man auf die Variable τ eine der beiden Substitutionen (4) oder (5) anwendet; sie bleibt daher auch ungeändert, wenn wir irgend eine Substitution der Gruppe, die durch diese beiden Substitutionen erzeugt wird, zur Anwendung bringen. Die Funktion $\tau(\lambda)$ ist also eine automorphe Funktion.*)

Diese Funktion ist nur für die positive τ-Halbebene definiert; über die Abszissenachse hinweg kann sie nicht analytisch fortgesetzt werden. Die Abszissenachse bildet somit eine natürliche Grenze der Funktion.

Aus den früher entwickelten Formeln ergibt sich sofort eine analytische Darstellung der Funktion $\lambda(\tau)$. Es ist (§ 66, Nr. 13)

$$\lambda(\tau) = k^2 = \left[\frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)}\right]^4$$

$$= \left[\frac{2\,q^{\frac{1}{4}}\,Q_1{}^2}{Q_2{}^2}\right]^4 = 16\,q\left[\prod_{\mu=1}^{\infty}\frac{1+q^{2\mu}}{1+q^{2\mu-1}}\right]^8$$

(§ 62, Nr. 2, 3, 6 und 7)

und

$$q = e^{\pi i \tau}.$$

Diese Darstellung gilt für die ganze positive τ-Halbebene. Sie zeigt, daß jedem Punkt in dieser Halbebene ein bestimmter endlicher Funktionswert λ entspricht. Daraus ergibt sich, daß die Vierecke P_i die ganze positive Halbebene bedecken, was sich übrigens auch auf geometrischem Weg leicht beweisen läßt.

Innerhalb der positiven τ-Halbebene verhält sich die Funktion $\lambda(\tau)$ überall regulär. Folglich besitzen zwei homo-

*) F. Th. § 79.

loge Punkte, in denen die Funktion denselben Wert annimmt, einen angebbaren Abstand.*) Wir schließen daraus, daß die zur automorphen Funktion $\lambda(\tau)$ gehörige Gruppe, die durch die Substitutionen (4) und (5) erzeugt wird, eigentlich diskontinuierlich ist (vgl. § 99). Auf der Begrenzung der positiven τ-Halbebene — der Abszissenachse — liegen die Ecken der Vierecke P_i; sie bedecken die Abszissenachse überall dicht aber nicht lückenlos.

Das Viereck P, über das der ganze Wertvorrat der Funktion $\lambda(\tau)$ einfach ausgebreitet werden kann, bezeichnet man als Fundamentalbereich dieser Funktion.

Der Fundamentalbereich kann in mannigfaltiger Weise abgeändert werden. Es ergibt sich das aus der folgenden Überlegung: um die Werte der Funktion $\tau(\lambda)$ den Punkten der λ-Ebene eindeutig zuordnen zu können, müssen wir in dieser einen Schnitt ausführen, der durch die Punkte $0, 1, \infty$ geht. In welcher Reihenfolge der Schnitt diese Punkte trifft, und wie er im übrigen verläuft, kommt nicht in Betracht. Die zerschnittene λ-Ebene läßt sich konform auf die τ-Ebene abbilden und diese Abbildung liefert einen Fundamentalbereich der Funktion $\lambda(\tau)$.

Aus dem Vorausgehenden ergibt sich der Beweis der Behauptung, auf die wir uns im § 69 gestützt haben, daß die Funktion $h = e^{\frac{\pi i \tau}{4}}$ der Variabeln $\varkappa = \sqrt{k} = \sqrt[4]{\lambda}$ sich regulär verhält, solange der absolute Betrag $|\varkappa| < 1$ bleibt. Unter dieser Bedingung ist nämlich die Größe $\varkappa$ eine reguläre Funktion der Variabeln h und die Derivierte $\frac{d\varkappa}{dh}$ verschwindet nicht.

§ 115. Abbildung der I-Ebene auf die τ-Ebene.

Bei der Abbildung der positiven λ-Halbebene auf das Dreieck D in der τ-Ebene treten bemerkenswerte Symmetrieverhältnisse auf.

Wir gehen von der Gleichung

$$\tau(\lambda) = \frac{iK'(\lambda)}{K(\lambda)} = i\,\frac{F(1-\lambda)}{F(\lambda)} \qquad (\S\,112, \text{Nr. } 1 \text{ u. } 2)$$

*) Vgl. F. Th. S. 125.

aus und setzen $\lambda = \frac{1}{2} + iy$. Es folgt

$$\tau(\lambda) = i\,\frac{F(\frac{1}{2} - iy)}{F(\frac{1}{2} + iy)}.$$

Weil die Koeffizienten der Reihe F reell sind, entsprechen konjugiert imaginären Werten des Arguments konjugiert imaginäre Werte der Reihensumme. Wenn die Größe y reell ist, hat daher der absolute Betrag der Funktion $\tau(\lambda)$ den Wert 1. Daraus folgt: der Teil der Ordinate durch den Punkt $\frac{1}{2}$, der in das gemeinsame Konvergenzgebiet der Reihen $F(\lambda)$ und $F(1-\lambda)$ fällt, wird auf einen Bogen eines Kreises vom Radius 1 um den Nullpunkt der τ-Ebene abgebildet. Weil die Funktion $\tau(\lambda)$ sich im Innern der Fläche E' überall regulär verhält, wird die ganze durch den Punkt $\frac{1}{2}$ gehende Ordinate auf die in der positiven τ-Halbebene liegende Hälfte des Einheitskreises abgebildet.

Zwei Punkten in der positiven λ-Halbebene, die zur Ordinate durch den Punkt $\frac{1}{2}$ symmetrisch liegen, entsprechen daher auf Grund des Spiegelungsprinzips zwei Punkte im Dreieck D, die zum Einheitskreis symmetrisch liegen. Die Ordinate durch den Punkt $\frac{1}{2}$ ist eine Symmetrielinie der Fläche E'; die dieser Graden entsprechende Hälfte des Einheitskreises ist eine Symmetrielinie des Vierecks P, also auch des Dreiecks D.

Am Schluß des § 112 haben wir gezeigt, daß für die positive λ-Halbebene die Gleichung (9)

$$\tau\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) = \frac{\tau(\lambda)-1}{\tau(\lambda)} \tag{1}$$

gilt. Durch die Transformation

$$\lambda' = \frac{\lambda-1}{\lambda} \tag{2}$$

wird die Ordinate durch den Punkt $\frac{1}{2}$ in einen Kreis vom Radius 1 um den Nullpunkt abgebildet. Die in der positiven λ-Halbebene liegende Hälfte dieses Kreises ist ebenfalls eine Symmetrielinie dieser Halbebene.

Der Transformation (2) entspricht die Transformation

$$\tau' = \frac{\tau-1}{\tau}. \tag{3}$$

Sie bildet den Einheitskreis auf einen Kreis ab, der den Abschnitt 0, 2 der Abszissenachse zum Durchmesser hat. Dieser Kreis ist eine Symmetrielinie des Dreiecks D.

Für die positive λ-Halbebene gilt ferner die Gleichung

$$(4) \qquad \tau\left(\frac{1}{1-\lambda}\right) = \frac{1}{1-\tau(\lambda)} \qquad (\S\ 122,\ \text{Nr. } 10).$$

Durch die Transformation

$$(5) \qquad \lambda' = \frac{1}{1-\lambda}$$

wird die Ordinate durch den Punkt $\frac{1}{2}$ auf einen Kreis vom Radius 1 um den Punkt 1 abgebildet, der ebenfalls eine Symmetrielinie der positiven λ-Halbebene ist. Durch die entsprechende Transformation

$$(6) \qquad \tau' = \frac{1}{1-\tau}$$

wird der Einheitskreis auf eine Ordinate durch den Punkt $\frac{1}{2}$ abgebildet.

Die positive Halbebene E' besitzt somit drei Symmetrielinien: die Ordinate durch den Punkt $\frac{1}{2}$ und die beiden Kreise vom Radius 1 um die Punkte 0 und 1. Die drei Symmetrielinien schneiden sich im Punkt $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ unter gleichen Winkeln. Diesen Symmetrielinien entsprechen in der positiven τ-Halbebene bzw.

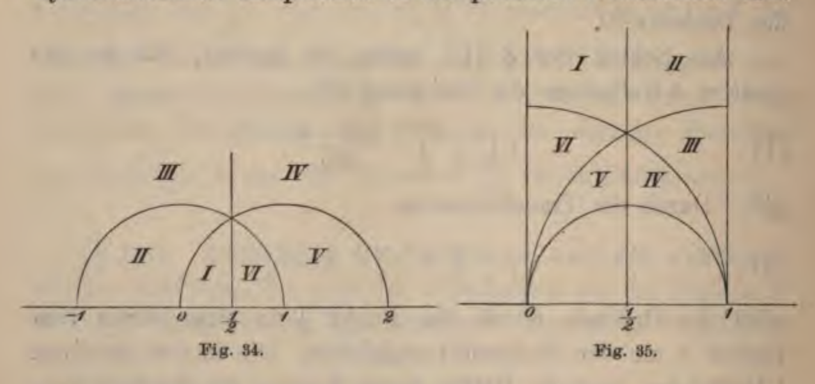


Fig. 34. Fig. 35.

der Einheitskreis, der Kreis vom Radius 1 um den Punkt 1 und die Ordinate durch den Punkt $\frac{1}{2}$. Die beiden nebenstehenden Figuren zeigen die Gebietseinteilung in der λ-Ebene und in der τ-Ebene, die durch die Symmetrielinien bewirkt

werden. Einander entsprechende Dreiecke sind mit denselben Ziffern bezeichnet. Die Bezeichnung ist so gewählt, daß die Dreiecke ungerade oder gerade Nummern tragen, je nachdem sie durch eine gerade oder durch eine ungerade Anzahl von Spiegelungen aus dem Ausgangsdreieck I hervorgehen. Die Substitution (2) bzw. (3) vertauscht die Dreiecke I III V und die Dreiecke II IV VI zyklisch. Den Eckpunkten $0 \; \frac{1}{2} \; \varepsilon$ des Dreiecks I in der λ-Ebene entsprechen die Eckpunkte $\infty \; i \; \varepsilon$ des Dreiecks I in der τ-Ebene.

Die Gebietseinteilung der positiven λ-Halbebene ist deshalb von Wichtigkeit, weil sich jedes der sechs Dreiecke als eine konforme Abbildung einer I-Halbebene darstellt: die mit geraden Nummern bezeichneten Dreiecke sind Bilder der positiven I-Halbebene, die mit ungeraden Nummern bezeichneten sind Bilder der negativen I-Halbebene.

Zum Beweis bemerken wir zunächst: die Invariante

$$I = \frac{4}{27} \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2} \tag{7}$$

ist eine rationale Funktion der Variabeln λ, die nur in den Punkten $0, 1, \infty$ der λ-Ebene unendlich wird. Die Variable λ ist, als Funktion der Variabeln I betrachtet, eine sechswertige Funktion, die nur im unendlich fernen Punkt der I-Ebene unendlich wird. Die sechs Werte der Variabeln λ, die einem gegebenen Wert der Variabeln I entsprechen, können als die sechs Werte des Doppelverhältnisses aufgefaßt werden, das durch vier gegebene Elemente bestimmt ist. Einem gegebenen Wert I entsprechen demnach die sechs Werte (§ 4, Nr. 4)

$$\lambda \quad \frac{1}{1-\lambda} \quad \frac{\lambda-1}{\lambda} \quad \frac{1}{\lambda} \quad 1-\lambda \quad \frac{\lambda}{\lambda-1}. \tag{8}$$

Die sechs Werte des Doppelverhältnisses sind alle untereinander verschieden, außer wenn zwei von den vier Elementen, die das Doppelverhältnis bestimmen, zusammenfallen oder wenn die vier Elemente harmonisch oder äquianharmonisch liegen (§ 4). Im ersten Fall ist $I = \infty$ und es besitzen je zwei von den Größen (8) die Werte $0, 1, \infty$. Im zweiten Fall ist $I = 1$ und je zwei von den Größen (8) besitzen die Werte

$$-1 \quad \tfrac{1}{2} \quad 2.$$

Im dritten Fall ist $I = 0$ und je drei von den Größen (8) besitzen die Werte

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \quad \text{und} \quad -\varepsilon^2 = \tfrac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}).$$

Es ist leicht, alle diese Angaben direkt zu verifizieren.

Die algebraische Funktion λ ist somit nur in den Punkten ∞, 1, 0 der I-Ebene verzweigt. Im Innern eines jeden unserer sechs Dreiecke in der λ-Ebene verhält sich die Variable I, als Funktion der Variabeln λ betrachtet, regulär und die Derivierte $\frac{dI}{d\lambda}$ verschwindet nicht. Folglich wird ein jedes Dreieck konform auf die I-Ebene abgebildet.

Die Gleichung (7) zeigt unmittelbar, daß Punkten auf der reellen Achse der λ-Ebene Punkte auf der reellen Achse der I-Ebene entsprechen. Schreibt man die Gleichung in der Form

$$I = \frac{4}{27}\frac{[(\lambda - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]^3}{[(\lambda - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}]^2},$$

so erkennt man, daß auch die Ordinate durch den Punkt $\frac{1}{2}$ der λ-Ebene auf die reelle Achse der I-Ebene abgebildet wird. Setzt man sodann in der Gleichung (7)

$$\lambda = 1 + e^{\varphi i},$$

so folgt

$$I = \frac{4}{27}\frac{[e^{\varphi i} + e^{-\varphi i} + 1]^3}{[e^{\frac{1}{2}\varphi i} + e^{-\frac{1}{2}\varphi i}]^2}.$$

Diese Gleichung zeigt, daß auch der Kreis vom Radius 1 um den Punkt 1 in der λ-Ebene auf die reelle Achse der I-Ebene abgebildet wird.

Demnach wird die Begrenzung des Dreiecks I in der λ-Ebene (Fig. 34) auf die reelle Achse der I-Ebene abgebildet und zwar die Seite $0, \frac{1}{2}$ auf den Achsenabschnitt $+\infty, 1$, die Seite $\frac{1}{2}, \varepsilon$ auf den Achsenabschnitt $1, 0$, die Seite $\varepsilon, 0$ auf den Achsenabschnitt $0, -\infty$. Weil einem positiven Umlauf um das Dreieck I ein positiver Umlauf um die Bildfläche entspricht, wird das Dreieck auf die negative I-Halbebene abgebildet.

Die Dreiecke III und V, die aus I durch eine gerade Anzahl von Spiegelungen hervorgehen, werden ebenfalls auf

die negative I-Halbebene abgebildet, dagegen werden die Dreiecke II, IV und VI, zu denen wir durch eine gerade Anzahl von Spiegelungen gelangen, auf die positive I-Halbebene abgebildet.

Die Abbildung der I-Ebene auf die λ-Ebene vermittelt eine Abbildung der I-Ebene auf die τ-Ebene und zwar wird die positive I-Halbebene auf die Dreiecke II, IV und VI, die negative I-Halbebene auf die Dreiecke I, III und V in der τ-Ebene abgebildet (Fig. 36).

Den Seiten $i\,\varepsilon$, $\varepsilon\,\infty$, $\infty\,i$ des Dreiecks I in der τ-Ebene entsprechen die Abschnitte $1\,0$, $0 - \infty$, $+\infty\,1$ der reellen Achse der I-Ebene.

Die Dreiecke I und II in der τ-Ebene setzen sich zu einem Viereck Π zusammen, das eine Abbildung der mit einem Einschnitt versehenen I-Ebene ist. Weil die beiden Dreiecke längs der Seite $\varepsilon\,\infty$ zusammenhängen, hängen ihre Abbildungen — die beiden I-Halbebenen — längs des Abschnittes $0 - \infty$ zusammen. Der Einschnitt in der I-Ebene geht also vom Punkt 0 längs der reellen Achse über 1 bis $+\infty$.

Das Viereck Π bildet einen Fundamentalbereich der Funktion $I(\tau)$.

Die Dreiecke III und IV setzen sich zu einem Viereck Π_1 zusammen, auf das ebenfalls die zerschnittene I-Ebene abgebildet wird, und ebenso liefert das Viereck Π_2, das sich aus den Dreiecken V und VI zusammensetzt, ein Bild der I-Ebene.

Durch die Substitution (4) werden die Vierecke $\Pi\,\Pi_1\,\Pi_2$ zyklisch vertauscht.

Fig. 36.

Die sechs in Rede stehenden Dreiecke in der τ-Ebene setzen sich zu dem Dreieck D zusammen (s. Fig. 36), auf das die positive λ-Halbebene abgebildet wird. Das anstoßende

Dreieck D', das auf die negative λ-Halbebene abgebildet wird, läßt sich ebenfalls in sechs Dreiecke zerlegen, die aus den ersten sechs Dreiecken durch Spiegelung an der Ordinatenachse hervorgehen. In der nebenstehenden Figur ist die Bezeichnung so gewählt, daß die Dreiecke mit geraden oder ungeraden Nummern bezeichnet sind, je nachdem sie Bilder der positiven oder der negativen I-Halbebene sind.

Die sechs neuen Dreiecke VII VIII; IX X; XI XII setzen sich wieder zu drei Vierecken $\Pi_3\ \Pi_4\ \Pi_5$ zusammen; jedes derselben liefert ein Bild der zerschnittenen I-Ebene.

Ein Blick auf die Figur zeigt, daß die Translation

$$\tau' = \tau - 1$$

die Vierecke $\Pi\ \Pi_1\ \Pi_2$ bzw. mit den Vierecken $\Pi_3\ \Pi_4\ \Pi_5$ zur Deckung bringt und zwar kommen homologe Punkte, denen derselbe Punkt der I-Ebene entspricht, zur Deckung.

Wir stellen die Transformationen zusammen, durch die das Ausgangsviereck Π in die Vierecke $\Pi_1 \Pi_2 \cdots \Pi_5$ übergeführt wird und fügen die den einzelnen Vierecken zugeordneten Werte der Funktion λ hinzu:

(9)

	Π	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
$\tau' =$	τ	$\frac{\tau-1}{\tau}$	$\frac{1}{1-\tau}$	$\tau - 1$	$-\frac{1}{\tau}$	$\frac{\tau}{1-\tau}$
$\lambda' =$	λ	$\frac{\lambda-1}{\lambda}$	$\frac{1}{1-\lambda}$	$\frac{\lambda}{\lambda-1}$	$1-\lambda$	$\frac{1}{\lambda}$.

Bezüglich der in der letzten Zeile stehenden Werte der Funktion λ' ist zu bemerken: die dem Vierecke Π_1 und Π_2 zuzuordnenden Werte ergeben sich aus den Ausführungen zu Anfang dieses Paragraphen, die den Vierecken $\Pi_3 \Pi_4 \Pi_5$ zuzuordnenden ergeben sich auf Grund der Beziehung (§ 112, Nr. 1 und 2)

$$\tau(1-\lambda) = \frac{iK'(1-\lambda)}{K(1-\lambda)} = \frac{iK(\lambda)}{K'(\lambda)} = -\frac{1}{\tau(\lambda)}.$$

Der im § 114 erörterten Einteilung der positiven τ-Halbebene in Vierecke P_i entspricht eine Einteilung derselben in Vierecke Π_i. Die Substitutionen, die das Ausgangsviereck Π in die verschiedenen Vierecke Π_i transformieren, erhalten wir, indem wir die unter (9) angegebenen Substitutionen mit den

Substitutionen zusammensetzen, die das Viereck P in die Vierecke P_i transformieren.

Die Gruppe der Substitutionen, die die Vierecke Π_i ineinander transformieren, nennt man die **Modulgruppe**. Wir bezeichnen sie mit Γ.

Die Modulgruppe enthält die Substitutionen

$$\text{(S)} \quad \tau' = \tau + 1 \qquad \text{und} \qquad \text{(T)} \quad \tau' = -\frac{1}{\tau}. \tag{9}$$

Aus diesen Substitutionen lassen sich alle Substitutionen

$$\text{(10)} \qquad \tau' = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

zusammensetzen, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind (§ 99, Schluß) und es ist leicht zu sehen, daß die Modulgruppe auch keine anderen Substitutionen enthalten kann.

Die Modulgruppe Γ besteht demnach aus den Substitutionen ersten Grades mit der Determinante 1, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind.

Die Substitutionen dieser Gruppe transformieren die automorphe Funktion $I(\tau)$ in sich selbst.

Weil jedem Punkt der I-Ebene ein Punkt im Innern oder auf der Begrenzung des Vierecks Π in der τ-Ebene entspricht, so können wir, wenn die Werte der Invarianten g_2 und g_3 gegeben sind, die Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$ so wählen, daß der reelle Teil des Quotienten $\frac{\omega_3}{\omega_1 i} \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist. Auf dieser Tatsache haben wir uns im § 68 bei der Besprechung der Konvergenz der ϑ-Reihen bezogen.

§ 116. Die Modulfunktionen. Eine einwertige Funktion der Variabeln τ, die zugleich algebraische Funktion der Variabeln I ist, bezeichnet man als „Modulfunktion". Unter diese Definition fällt selbstverständlich die automorphe Funktion $I(\tau)$ selbst und jede rationale Funktion derselben, es fallen darunter aber auch die homogenen Funktionen der Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$, die im Problem der Teilung der Perioden auftreten, soweit sie homogen vom Grade Null, also Funktionen des Periodenquotienten τ sind. Dazu gehören die Quotienten aus zwei Wurzeln der Teilungsgleichung

$$x_{\lambda\mu} = p\left(\frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right)$$

und die Wurzeln der Invariantengleichung (§ 109). Das Problem der Teilung erscheint demnach als Spezialfall der Theorie der Modulfunktionen.

Eine rationale Funktion der Variabeln I wird durch alle Substitutionen der Modulgruppe Γ in sich selbst transformiert. Umgekehrt ist eine einwertige Funktion der Variabeln τ

$$w = \varphi(\tau),$$

die durch alle Substitutionen der Modulgruppe in sich selbst transformiert wird, wenigstens eine einwertige Funktion der Variabeln τ. Denn den unendlich vielen homologen Punkten der τ-Ebene, die demselben Punkt der I-Ebene entsprechen, ist derselbe Wert der Funktion $\varphi(\tau)$ zugeordnet.

Nehmen wir nunmehr an, die einwertige Funktion w der Variabeln τ genüge einer irreduziblen Gleichung m-ten Grades

$$\Phi(w/I) = 0, \tag{I}$$

deren Koeffizienten rationale Funktionen der Variabeln I sind.

Wenn wir die Variablen w und I durch τ ausdrücken, so geht die Gleichung (1) in eine Identität über. Wenden wir eine Substitution der Modulgruppe

$$\tau = \frac{\gamma + \delta\tau_1}{\alpha + \beta\tau_1} \tag{U}$$

an, so werden die Koeffizienten der Gleichung (1) in sich selbst transformiert. Es muß daher auch die Funktion $w_1 = \varphi(\tau_1)$ der Gleichung (1) genügen.

Indem wir der Reihe nach $m - 1$ geeignet gewählte Substitutionen der Modulgruppe auf die Funktion $w = \varphi(\tau)$ anwenden, erhalten wir die $m - 1$ übrigen Wurzeln der Gleichung (1).

Zum Beweis nehmen wir einen Augenblick an, daß wir bei Anwendung aller Substitutionen der Modulgruppe nur zu den p Wurzeln der Gleichung (1)

$$w \quad w_1 \quad w_2 \cdots w_{p-1} \qquad (p < m) \tag{2}$$

gelangen. Unter dieser Annahme wird eine beliebige Substitution der Modulgruppe diese Wurzeln nur untereinander

permutieren, sie wird daher eine rationale symmetrische Funktion F der Wurzeln (2) in sich selbst transformieren. Folglich ist die Funktion F eine einwertige Funktion der Variabeln I und weil sie eine algebraische Funktion dieser Variabeln ist, so läßt sie sich rational durch I ausdrücken. Aus unserer Annahme folgt daher, daß die Größen (2) einer algebraischen Gleichung p-ten Grades genügen, deren Koeffizienten rationale Funktionen der Variabeln I sind. Aber dies widerspricht unserer Voraussetzung, daß die Gleichung (1) irreduzibel ist.

Jede Substitution der Modulgruppe bewirkt eine bestimmte Permutation der Wurzeln der Gleichung (1). Weil den unendlich vielen Substitutionen nur eine endliche Anzahl von Permutationen gegenüber steht, so müssen unendlich viele Substitutionen dieselbe Permutation bewirken. Wenn zwei Substitutionen W_1 und W_2 dieselbe Permutation hervorrufen, so läßt die Substitution $W_1 W_2^{-1}$ jede Wurzel ungeändert. Es gibt daher unendlich viele Substitutionen, die jede Wurzel ungeändert lassen. Es seien dies die Substitutionen

$$V_0 = 1 \quad V_1 \quad V_2 \quad V_3 \cdots. \tag{3}$$

Diese Substitutionen bilden offensichtlich eine Gruppe; wir bezeichnen dieselbe mit Γ'.

Transformieren wir eine Substitution V_ν der Gruppe Γ' durch eine beliebige Substitution W der Modulgruppe. Die Transformierte

$$W^{-1} V_\nu W$$

läßt ebenfalls alle Wurzeln der Gleichung (1) ungeändert und gehört daher ebenfalls der Gruppe Γ' an, denn die Permutation der Wurzeln, die durch die Substitution W^{-1} bewirkt wird, wird durch die Substitution W wieder rückgängig gemacht. Daraus folgt: Die Gruppe Γ' ist eine ausgezeichnete Untergruppe der Modulgruppe (vgl. § 92 und 99).

Es sei r die Anzahl der verschiedenen Permutationen der Wurzeln der Gleichung (1), die wir bei Anwendung aller Modulsubstitutionen erhalten. Mit

$$U_1 \quad U_2 \cdots U_{r-1} \tag{4}$$

bezeichnen wir Modulsubstitutionen, durch die wir die Anfangspermutation in die $r-1$ übrigen überführen können. Wir ordnen nun die Modulsubstitutionen in eine Tabelle

$$
\begin{array}{lllll}
1 & V_1 & V_2 & V_3 & \cdots \\
U_1 & V_1 U_1 & V_2 U_1 & V_3 U_1 & \cdots \\
U_2 & V_1 U_2 & V_2 U_2 & V_3 U_2 & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
U_{r-1} & V_1 U_{r-1} & V_2 U_{r-1} & V_3 U_{r-1} & \cdots
\end{array} \tag{5}
$$

In der ersten Zeile der Tabelle stehen die unendlich vielen Substitutionen der Untergruppe Γ', die die Anfangspermutation der Wurzeln ungeändert lassen. Die zweite Zeile enthält alle Substitutionen, die diese Anfangspermutation in dieselbe zweite Permutation überführen, die dritte Zeile enthält alle Substitutionen, die die Anfangspermutation in dieselbe dritte Permutation überführen usw. Unsere Tabelle enthält also alle Substitutionen der Modulgruppe und jede nur einmal.

Die Untergruppe Γ' der Modulgruppe besitzt demnach einen endlichen Index r (vgl. § 99).

Das Produkt zweier Substitutionen U_α und U_β wird, allgemein zu reden, nicht in der Reihe der Substitutionen (4) enthalten sein, aber es muß sich in der Form

$$U_\alpha U_\beta = V_\nu U_\gamma \tag{6}$$

ausdrücken lassen. Bilden wir nun das Produkt zweier Substitutionen $V_\lambda U_\alpha$ und $V_\mu U_\beta$, die denselben Zeilen der Tabelle (5) angehören wie die Substitutionen U_α und U_β. Weil die Untergruppe Γ' ausgezeichnet ist, so gehört ihr auch die Transformierte

$$V_\varkappa = U_\alpha V_\mu U_\alpha^{-1}$$

an. Es ist daher auch das Produkt

$$(V_\lambda U_\alpha)(V_\mu U_\beta) = V_\lambda (U_\alpha V_\mu U_\alpha^{-1}) U_\alpha U_\beta = V_\lambda V_\varkappa V_\nu U_\gamma \quad (6)$$
$$= V_\varrho U_\gamma \tag{7}$$

ebenso wie das Produkt $U_\alpha U_\beta$ in der $\gamma+1$-ten Zeile der Tabelle (5) enthalten. Aus dieser Bemerkung ergibt sich eine wichtige Folgerung. Jeder Zeile der Tabelle (5) entspricht

eine auf die Wurzeln der Gleichung (1) bezügliche Substitution. Wir bezeichnen diese Substitutionen der Reihe nach mit

$$1 \quad S_1 \quad S_2 \cdots S_{r-1}.$$

Sie bilden eine mit der Modulgruppe isomorphe Gruppe G.

Denn dem Produkt zweier Modulsubstitutionen $(V_\lambda U_\alpha)(V_\mu U_\beta)$, denen die Substitutionen S_α und S_β der Gruppe G entsprechen, entspricht zufolge (7) das Produkt

$$S_\alpha S_\beta = S_\gamma.$$

Der identischen Substitution der Gruppe G entspricht die ausgezeichnete Untergruppe Γ' der Modulgruppe.

Man bezeichnet die Substitutionen (4)

$$1 \quad U_1 \quad U_2 \cdots U_{r-1}$$

als „Repräsentanten" der Modulgruppe in Beziehung auf die ausgezeichnete Untergruppe Γ'.

In dem Rationalitätsbereich, den die rationalen Funktionen der Variabeln I bilden, ist die Gruppe G die Gruppe der Gleichung (1).

Zum Beweis bilden wir eine rationale Funktion F der Wurzeln der Gleichung (1), die bei Anwendung der Substitutionen der Gruppe G ungeändert bleibt, aber bei Anwendung jeder anderen Substitution ihren Wert ändert (vgl. § 93). Weil die Substitutionen der Modulgruppe Γ dieselben Permutationen der Wurzeln der Gleichung (1) bewirken wie die Substitutionen der Gruppe G, so wird F als Funktion der Variabeln τ betrachtet durch die Substitutionen der Modulgruppe in sich selbst transformiert. Daher läßt sich die Funktion F rational durch die Variable I ausdrücken. Da nun jede auf die Wurzeln bezügliche Substitution, die nicht zur Gruppe G gehört, den Wert der Funktion F ändert, so kann die Gruppe der Gleichung keine derartige Substitution enthalten. Andererseits ist einleuchtend, daß alle Permutationen der Wurzeln der Gleichung (1), die durch Substitutionen der Modulgruppe bewirkt werden, nicht gegen eine rationale Beziehung, die zwischen den Wurzeln

besteht, verstoßen können. Daher muß die Gruppe der Gleichung (1) alle Substitutionen der Gruppe G enthalten.*)

Wenn der Grad m der Gleichung (1) kleiner als der Grad r der Gruppe G ist, so enthält diese Gruppe eine Anzahl von Substitutionen, die die Funktion $w = \varphi(\tau)$ ungeändert lassen. Diese Substitutionen bilden eine Untergruppe H, deren Grad $p = \frac{r}{m}$ ist. Nehmen wir an, die Gruppe H bestehe aus den Substitutionen

$$S_0 = 1 \quad S_1 \quad S_2 \cdots S_{p-1}.$$

Wir können nun m Substitutionen der Gruppe G

$$T_0 = 1 \quad T_1 \quad T_2 \cdots T_{m-1}$$

derart auswählen, daß sich alle Substitutionen der Gruppe G in der Form

$$(8) \qquad S_\alpha T_\beta \quad (\alpha = 0, 1, 2, \cdots, p-1;\ \beta = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$$

darstellen lassen.

Aus der isomorphen Beziehung zwischen den Gruppen G und Γ ergibt sich, daß die Substitutionen

$$(9) \qquad V_\lambda U_\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, \cdots, p-1;\ \lambda = 0, 1, 2, \cdots, \text{in inf.}),$$

die den ersten p Zeilen der Tabelle (5) angehören, eine Untergruppe H der Modulgruppe bilden und daß diese Substitutionen die Funktion $w = \varphi(\tau)$ in sich selbst transformieren. Den Substitutionen $T_1 T_2 \cdots T_{m-1}$ entsprechen $m-1$ Substitutionen aus der Reihe $U_p U_{p+1} \cdots U_{r-1}$, die der Gruppe H nicht angehören. Wir wollen sie mit $W_1 W_2 \cdots W_{m-1}$ bezeichnen. Der Darstellung (8) der Substitutionen der Gruppe G entspricht die Darstellung

*) Wenn wir in den Rationalitätsbereich nicht alle rationalen Funktionen der Variabeln I aufnehmen, sondern etwa nur diejenigen, deren Koeffizienten rationale Zahlen sind, so ist der Fall vorzusehen, daß keine Funktion F von der im Text definierten Art dem Rationalitätsbereich angehört. In diesem Fall enthält die Gruppe G nicht alle Substitutionen der Gruppe der Gleichung, sondern sie ist eine ausgezeichnete Untergruppe dieser Gruppe. Die Abelschen Relationen (§ 106) geben ein Beispiel von rationalen Relationen zwischen den Wurzeln, deren Koeffizienten von einer numerischen Irrationalität abhängen.

$$(10) \qquad V_\lambda U_\alpha W_\beta$$

$(\alpha = 0, 1, 2, \cdots, p-1;\ \beta = 0, 1, 2, \cdots, m-1;\ \lambda = 0, 1, 2, \cdots, \text{in inf.})$
der Substitutionen der Modulgruppe. Sie liefert uns alle Substitutionen der Modulgruppe und jede nur einmal.

Jede der Substitutionen U_α, W_β darf durch eine beliebig zu wählende Substitution, die derselben Zeile der Tabelle (5) angehört, ersetzt werden.

§ 117. Geometrische Repräsentation. Ebenso wie wir früher die Funktionen $\lambda(\tau)$ und $I(\tau)$ geometrisch repräsentiert haben (§ 114 und 115), so wollen wir nun auch den Verlauf der Funktion $w = \varphi(\tau)$ geometrisch anschaulich machen.

Durch die Substitutionen der Gruppe H, die die automorphe Funktion $\varphi(\tau)$ in sich selbst transformieren, kann das Ausgangsviereck Π (Fig. 36) in unendlich viele von den Vierecken Π_i transformiert werden, die die positive τ-Halbebene bedecken. Wir wollen alle diese Vierecke, in die Π durch die Gruppe H transformiert wird, kurz als „äquivalent“ bezeichnen. Durch die Substitutionen

$$(1) \qquad 1 \quad W_1 \quad W_2 \cdots W_{m-1}$$

(s. den Schluß des vorigen Paragraphen) wird das Viereck Π bzw. in die Vierecke

$$(2) \qquad \Pi \quad \Pi_1 \quad \Pi_2 \cdots \Pi_{m-1}$$

transformiert. Keine zwei von diesen Vierecken sind einander äquivalent. Denn wären etwa die Vierecke Π_β und Π_γ äquivalent, so müßte die Substitution $W_\beta^{-1} W_\gamma$, die Π_β in Π_γ transformiert, der Gruppe H angehören, was nicht der Fall ist.

Die Substitutionen (1) können in mannigfaltiger Weise gewählt werden. Jedem zulässigen System von Substitutionen (1) entspricht ein System von nicht äquivalenten Vierecken (2). Es sind aber auch umgekehrt die Substitutionen (1) durch die Vierecke (2) eindeutig bestimmt und wir können deshalb auch von einem System von m nicht äquivalenten Vierecken ausgehen. Diese Vierecke können wir so wählen, daß sie eine zusammenhängende Fläche Q bilden.

Zu dem Zweck wählen wir als Viereck Π_1 ein Viereck, das mit dem Viereck Π nicht äquivalent ist und mit ihm eine

Seite gemein hat. Das Viereck Π_2 wählen wir so, daß es mit keinem der Vierecke Π, Π_1 äquivalent ist und wenigstens mit einem derselben eine Seite gemein hat usw. Indem wir dieses Verfahren so lang als möglich fortsetzen, erhalten wir eine Reihe von Vierecken

$$(3) \qquad \Pi \quad \Pi_1 \quad \Pi_2 \cdots \Pi_{p-1},$$

die eine zusammenhängende Fläche Q bilden.

Jedes Viereck Π_i, das an das Polygon Q längs einer Seite angrenzt, muß mit einem der Vierecke (3) äquivalent sein, denn anderenfalls könnten wir unser Verfahren fortsetzen.

Weil es nur m nicht äquivalente Vierecke gibt, kann die Zahl p nicht $> m$ sein; daß sie auch nicht $< m$ sein kann, beweisen wir indirekt.

Unter der Voraussetzung $p < m$ gibt es unter den Vierecken Π_i solche, die mit keinem der p Vierecke (3) äquivalent sind. Wir verbinden einen Punkt in der Fläche Q mit einem Punkt im Innern eines dieser Vierecke durch einen Weg L, der durch keinen Eckpunkt eines der Vierecke Π_i hindurchgeht. Dieser Weg L durchlaufe der Reihe nach die Vierecke $\Pi_p\ \Pi_{p+1} \cdots$. In dieser Reihe sei Π_q das erste Viereck, das mit keinem der Vierecke (3) äquivalent ist. Weil nach Voraussetzung jedes der Vierecke Π_i, das an das Polygon Q angrenzt, mit einem der Vierecke (3) äquivalent ist, muß $q \geqq p + 1$ sein.

Das Viereck Π_{q-1} ist mit einem der Vierecke (3) äquivalent; es sei dies das Viereck Π_h. Die Substitution der Gruppe H, die Π_{q-1} in Π_h transformiert, transformiert das Viereck Π_q in ein Viereck Π', das mit Π_h eine Seite gemein hat, weil die Vierecke Π_{q-1} und Π_q längs einer Seite zusammenhängen.

Das mit dem Viereck Π_q äquivalente Viereck Π' ist mit keinem der Vierecke (3) äquivalent und es hat mit dem Viereck Π_h also auch mit der Fläche Q eine Seite gemein. Dies steht im Widerspruch zu unserer Annahme, also muß $p = m$ sein.

Die Vierecke Π_i, die die positive τ-Halbebene bedecken, ordnen sich zu m in Polygone Q_j, die mit dem Polygon Q

äquivalent sind. Im Fall der Funktion $\lambda(\tau)$ sind die Polygone Q_j mit den Vierecken P_j identisch, die sich aus je sechs von den Vierecken Π_i zusammensetzen (vgl. § 115).

Nehmen wir an, das Polygon Q_1 hänge mit dem Anfangspolygon Q längs der Seite s zusammen. Die Substitution U_1 der Gruppe H, die das Polygon Q in Q_1 transformiert, ordnet der Seite s des Polygons Q_1 eine Seite s' des Polygons Q zu. Da die Seite s auch dem Polygon Q angehört, so sind durch die Substitution U_1 zwei Seiten dieses Polygons einander zugeordnet und weil das Polygon Q längs jeder seiner Seiten an ein äquivalentes Nachbarpolygon grenzt, so ist jeder seiner Seiten eine andere durch eine Substitution der Gruppe H zugeordnet. Dabei ist nicht ausgeschlossen, daß eine Polygonseite sich selbst zugeordnet ist.

Durch die Zuordnung der Seiten sind die Substitutionen der Gruppe H, die die Zuordnung vermitteln, vollständig bestimmt und man kann geradezu durch die Zuordnung der Seiten des Polygons Q die erzeugenden Substitutionen der Gruppe H bestimmen.

Wenn wir die m Vierecke (2), aus denen das Polygon Q besteht, mittelst der Funktion $I(\tau)$ auf die I-Ebene abbilden, so wird diese m-fach überdeckt. Wir legen nun m Exemplare der I-Ebene aufeinander und schneiden ein jedes längs der Abschnitte $0, 1$ und $1, +\infty$ der Abszissenachse auf, auf die die Seiten der Vierecke Π_i abgebildet werden. Auf jedes Blatt wird eines der Vierecke (2) abgebildet. So oft zwei von den Vierecken (2) längs einer Seite zusammenhängen, heften wir die entsprechenden Blätter längs des Achsenabschnitts, der der gemeinsamen Seite entspricht, zusammen und erhalten so eine m-blättrige Riemannsche Fläche T.

Den Eckpunkten der Vierecke (2), in denen eine Anzahl derselben zusammenhängt, entsprechen die Windungspunkte der Riemannschen Fläche (vgl. F. Th. § 58). Die Windungspunkte können also nur in die Punkte $0, 1, \infty$ der I-Ebene fallen.

Einem gegebenen Wert der Funktion $I(\tau)$ entspricht in jedem der m Vierecke (2) ein Punkt; diesen m homologen Punkten sind die m verschiedenen Werte der Funktion $w = \varphi(\tau)$

zugeordnet. In der Riemannschen Fläche T entsprechen den m Punkten in der τ-Ebene m sich deckende Punkte in den m Blättern.

Wenn wir w als Funktion der Variabeln τ betrachten, so ordnen wir die Werte w eindeutig den Punkten des Polygons Q zu, betrachten wir w als Funktion der Variabeln I, so ordnen wir die Werte w eindeutig den Punkten der Riemannschen Fläche T zu.

Wenn die Funktion $w(\tau)$ einen beliebigen vorgeschriebenen Wert nur in einem Punkt der Fläche Q annimmt, so vermittelt diese Funktion eine konforme Abbildung des Polygons Q auf die Riemannsche Fläche T. In diesem Fall läßt sich die Funktion $I(\tau)$ rational durch die Funktion $w(\tau)$ ausdrücken.

Dies trifft z. B. für die Funktion $\lambda(\tau)$ zu.

Wenn die Funktion $w(\tau)$ einen gegebenen Wert in p Punkten des Polygons Q annimmt, so sind die Koeffizienten der Gleichung, die w als Funktion der Variabeln I bestimmt, ganze rationale Funktionen p-ten Grades dieser Variabeln.

§ 118. Die Kongruenzgruppen. Man kann zur Zeit nur diejenigen Untergruppen der Modulgruppe arithmetisch definieren, die sich durch Kongruenzen nach einem gegebenen Modul charakterisieren lassen. Man nennt diese Untergruppen nach Kleins Vorgang „Kongruenzgruppen". Insbesondere bezeichnet man als „Hauptkongruenzgruppe n-ter Stufe" die Untergruppe der Modulgruppe, deren Substitutionen durch die Kongruenzen

$$(1) \qquad \alpha \equiv \delta \equiv \pm 1 \qquad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \mod n$$

charakterisiert sind.

Die Kongruenzen, die eine Kongruenzgruppe definieren, dürfen nicht beliebig gewählt werden: damit ein System von Bedingungen eine Gruppe bestimmt, ist erforderlich, daß diesen Bedingungen gleichzeitig mit den Substitutionen V_1 und V_2 das Substitutionenprodukt $V_1 V_2$ genügt.

Um die folgenden Auseinandersetzungen abzukürzen, bezeichnen wir die Substitution

(W) $$\tau = \frac{\gamma + \delta\tau'}{\alpha + \beta\tau'}$$

im Einklang mit der Seite 363 eingeführten Bezeichnungsweise symbolisch durch

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Weil ein gleichzeitiger Zeichenwechsel aller Koeffizienten die Substitution ungeändert läßt, ist

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}.$$

Wenn die Koeffizienten zweier Substitutionen den Kongruenzen

$$\begin{array}{llll} \alpha \equiv a & \beta \equiv b & \gamma \equiv c & \delta \equiv d \end{array}$$

oder $\qquad\qquad\qquad\qquad \text{mod } n$

$$\begin{array}{llll} \alpha \equiv -a & \beta \equiv -b & \gamma \equiv -c & \delta \equiv -d \end{array}$$

genügen, so bezeichnen wir die beiden Substitutionen als äquivalent in Beziehung auf den Modul n und drücken das durch das Zeichen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{mod } n$$

aus.

Wenn die Substitutionen V_1 und W_1 und die Substitutionen V_2 und W_2 äquivalent sind, so sind auch die Substitutionenprodukte $V_1 V_2$ und $W_1 W_2$ äquivalent.

Die Substitutionen, die den Kongruenzen (1) genügen, sind in Beziehung auf den Modul n der identischen Substitution äquivalent. Auf Grund der eben gemachten Bemerkung folgt hieraus sofort, daß diese Substitutionen in der Tat eine Gruppe bilden. Transformieren wir eine Substitution der Hauptkongruenzgruppe

$$V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

durch eine beliebige Substitution der Modulgruppe

$$W = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}.$$

Weil $V \backsim 1$ ist, gehört auch die transformierte Substitution

$$W^{-1} V W \backsim W^{-1} W \backsim 1$$

der Hauptkongruenzgruppe an.

Die Hauptkongruenzgruppe n-ter Stufe ist daher eine ausgezeichnete Untergruppe der Modulgruppe.

Aus der Definition der Äquivalenz in Beziehung auf den Modul n ergibt sich, daß wir aus der Modulgruppe nur eine endliche Anzahl nicht äquivalenter Substitutionen auswählen können. Wir bezeichnen diese Anzahl mit r und mit

$$U_0 = 1 \quad U_1 \quad U_2 \cdots U_{r-1} \tag{2}$$

ein vollständiges System nicht äquivalenter Substitutionen.

Eine beliebige Substitution W der Modulgruppe ist einer der Substitutionen (2) äquivalent. Es sei dies die Substitution U_ν.

Das Produkt $V = W U_\nu^{-1}$ ist daher der identischen Substitution äquivalent und gehört daher der Hauptkongruenzgruppe an. Daraus folgt: alle Substitutionen der Modulgruppe lassen sich in der Form

$$W = V U_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots, r-1)$$

darstellen, wo V eine Substitution der Hauptkongruenzgruppe bedeutet. Die Substitutionen (2) bilden daher ein Repräsentantensystem der Modulgruppe in Beziehung auf diese. Der Index derselben ist also $= r$ (§ 99). Wir wollen sie deshalb mit Γ_r bezeichnen.

Wir haben nun noch die Anzahl r der nicht äquivalenten Substitutionen der Modulgruppe festzustellen. Dabei stützen wir uns auf den sofort zu beweisenden Hilfssatz:

Sind vier Zahlen $abcd$ gegeben, die der Kongruenz

$$ad - bc \equiv 1 \mod n \tag{3}$$

genügen, so können wir immer eine Modulsubstitution bestimmen, die den Kongruenzen

$$\alpha \equiv a \quad \beta \equiv b \quad \gamma \equiv c \quad \delta \equiv d \mod n \tag{4}$$

genügt.

Es ist klar, daß alle Modulsubstitutionen, die den Kongruenzen (4) genügen, untereinander äquivalent sind.

Den Lösungen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

der Kongruenz (3) entspricht dieselbe Substitution der Modulgruppe. Die beiden Zahlenquadrupel stellen verschiedene Lösungen der Kongruenz (3) dar, außer wenn $n = 2$ ist.

Die Anzahl r der nicht äquivalenten Substitutionen der Modulgruppe ist also gleich der Anzahl der Lösungen der Kongruenz (3), wenn $n = 2$ ist und gleich der Hälfte dieser Anzahl, wenn $n > 2$ ist.

Wir müssen nun die Anzahl der Lösungen der Kongruenz (3) bestimmen; wir wollen sie mit $\chi(n)$ bezeichnen.

Unter der Voraussetzung, daß n eine Primzahl ist, haben wir schon früher gefunden, daß

$$\chi(n) = n(n^2 - 1)$$

ist. Wir wollen nun zunächst annehmen, es sei n Potenz einer Primzahl $= p^\pi$.

Wählen wir für a eine nicht durch p teilbare Zahl, so können wir die Zahlen b und c beliebig wählen, die Zahl d ist durch die Kongruenz (3) bestimmt. Da es $p^\pi - p^{\pi-1}$ modulo p^π inkongruente durch p nicht teilbare Zahlen gibt, so erhalten wir $(p^\pi - p^{\pi-1})p^{2\pi}$ verschiedene Möglichkeiten.

Wählen wir sodann für a eine durch p teilbare Zahl, so können wir die Zahl d beliebig wählen, für b dürfen wir eine beliebige nicht durch p teilbare Zahl wählen, die Zahl c ist dann durch (3) bestimmt. Wir erhalten in diesem Fall $p^{\pi-1} p^\pi (p^\pi - p^{\pi-1})$ Möglichkeiten. Folglich ist

$$(5) \qquad \chi(n) = p^{3\pi-1}(p^{\pi+1} - p^{\pi-1}) = n^3\left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Wenn die Zahl n durch verschiedene Primzahlen teilbar ist, so können wir sie in zwei relativ prime Faktoren n_1 und n_2 zerspalten. Wir bestimmen nun zwei Zahlenquadrupel durch die Kongruenzen

$$(6) \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 \equiv 1 \mod n_1 \qquad a_2 d_2 - b_2 c_2 \equiv 1 \mod n_2$$

und bestimmen dann die Zahlen $abcd$ durch die Kongruenzen

$$(7)\qquad \begin{cases} a \equiv a_1 \quad b \equiv b_1 \quad c \equiv c_2 \quad d \equiv d_1 \quad \mod n_1 \\ a \equiv a_2 \quad b \equiv b_2 \quad c \equiv c_2 \quad d \equiv d_2 \quad \mod n_2. \end{cases}$$

Jedem Paar von Lösungssystemen der Kongruenzen (6) ist durch (7) eine Lösung der Kongruenz (3) zugeordnet und diese Zuordnung ist wechselseitig eindeutig. Unter der Voraussetzung, daß die Zahlen n_1 und n_2 relativ prim sind, ist daher

$$(8)\qquad \chi(n_1 n_2) = \chi(n_1)\,\chi(n_2).$$

Wir zerlegen nun die Zahl n in ein Produkt von Primzahlpotenzen

$$n = p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \cdots p_i^{\pi_i}$$

und erhalten auf Grund der Gleichungen (5) und (8)

$$(9)\qquad \chi(n) = n^3\left(1 - \frac{1}{p_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right).$$

Die Anzahl der nicht äquivalenten Substitutionen der Modulgruppe ist also $= 6$, wenn $n = 2$ ist und $= \frac{1}{2}\chi(n)$ für $n > 2$.

Es bleibt noch zu beweisen, daß es eine Substitution der Modulgruppe gibt, deren Koeffizienten den Kongruenzen (4) genügen.

Wir nehmen zunächst an, die Zahlen a und b seien relativ prim und setzen unter λ, μ beliebig zu wählende ganze Zahlen verstehend

$$\alpha = a \quad \beta = b \quad \gamma = c + \lambda n \quad \delta = d + \mu n.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\alpha\delta - \beta\gamma = ad - bc + (a\mu - b\lambda)n.$$

Wegen (3) ist

$$ad - bc = 1 + en,$$

wo e eine ganze Zahl bedeutet.

Weil die Zahlen a und b nach Voraussetzung relativ prim sind, können wir die Zahlen λ und μ so wählen, daß

$$b\lambda - a\mu = e$$

und folglich

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ist. Die Substitution

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

genügt den gestellten Bedingungen.

Der Fall, daß die Zahlen a und b nicht relativ prim sind, läßt sich auf den eben erledigten zurückführen.

Weil nur die Reste der Zahlen $abcd$ modulo n in Betracht kommen, können wir die Zahlen a und b durch kongruente Zahlen $a' = a + \lambda n$, $b' = b + \mu n$ ersetzen und die Zahlen λ und μ so wählen, daß a' und b' relativ prim sind.

Die Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe besitzt den Index 6. Die sechs Substitutionen

$$\tau' = \tau, \quad \frac{\tau - 1}{\tau}, \quad \frac{1}{1-\tau}, \quad \tau - 1, \quad -\frac{1}{\tau}, \quad \frac{\tau}{1-\tau}$$

bilden ein vollständiges Repräsentantensystem der Modulgruppe in Beziehung auf diese Gruppe Γ_6.

Diese sechs Substitutionen sind uns schon früher entgegengetreten (s. § 115, Nr. 7): sie transformieren das Viereck Π, den Fundamentalbereich der Funktion $I(\tau)$ in die sechs Vierecke $\Pi\,\Pi_1 \cdots \Pi_5$, die zusammen das Viereck P, den Fundamentalbereich der Funktion $\lambda(\tau)$ bilden. Die Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe Γ_6 ist demnach identisch mit der Gruppe der Substitutionen, die die automorphe Funktion $\lambda(\tau)$ in sich selbst transformieren.

§ 119. Die Funktion $I\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$. Es ist leicht eine Funktion anzugeben, die durch die Hauptkongruenzgruppe n-ter Stufe Γ_r in sich transformiert wird.

Wir verstehen unter $a\,b\,c\,d$ ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler, die der Gleichung

$$ad - bc = n \tag{1}$$

genügen und setzen zur Abkürzung

$$t = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}.\text{*)} \tag{2}$$

*) In der Theorie der Transformation der elliptischen Funktionen (§ 101) haben wir auch „imprimitive" Periodensubstitutionen

$$\Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3 \qquad \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3,$$

Wir beweisen zunächst: den unendlich vielen Zahlenquadrupeln, die der Bedingung (1) genügen, entspricht nur eine endliche Anzahl von Werten der Funktion

$$w = I(t). \tag{3}$$

Zum Beweis wenden wir auf die Variable t die Modulsubstitution

$$t' = \frac{\gamma + \delta t}{\alpha + \beta t} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \tag{4}$$

an. Aus (2) und (4) folgt eine Gleichung der Form

$$t' = \frac{c' + d'\tau}{a' + b'\tau} \tag{5}$$

und zwar ist

$$\begin{aligned} a' &= \alpha a + \beta c & b' &= \alpha b + \beta d \\ c' &= \gamma a + \delta c & d' &= \gamma b + \delta d. \end{aligned} \tag{6}$$

Über die Koeffizienten der Modulsubstitution (5) können wir derart verfügen, daß $b' = 0$ und $0 \leq c' < a'$ ist.

Die Zahlen α und β sind relativ prim. Wir müssen daher, um der ersten Bedingung zu genügen

$$\alpha = \pm \frac{d}{\sigma} \qquad \beta = \mp \frac{b}{\sigma} \tag{7}$$

setzen, wo σ den größten gemeinschaftlichen Divisor der beiden Zahlen b und d bedeutet.

Bezeichnen wir mit $\gamma_0\ \delta_0$ zwei Zahlen, die der Bedingung

$$\alpha\delta_0 - \beta\gamma_0 = \pm\left(\frac{d}{\sigma}\delta_0 + \frac{b}{\sigma}\gamma_0\right) = 1 \tag{8}$$

genügen, so sind alle möglichen Werte der Zahlen $\gamma\delta$ in der Form

$$\gamma = \gamma_0 + \varrho\alpha \qquad \delta = \delta_0 + \varrho\beta \tag{9}$$

enthalten. Die Zahl ϱ kann beliebig gewählt werden.

deren Koeffizienten einen gemeinschaftlichen Divisor besitzen, in Betracht gezogen. Wenn wir von den homogenen Periodensubstitutionen zu den nichthomogenen Substitutionen übergehen, die sich auf den Periodenquotienten beziehen, so kann ein gemeinschaftlicher Divisor der Substitutionskoeffizienten weggehoben werden und wir können, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beschränken, annehmen, daß dies von vornherein geschehen sei.

Substituieren wir die Werte (7) und (9) in die Gleichungen (6), so folgt

$$(10)\qquad \begin{aligned} a' &= \pm \frac{n}{\sigma} & b' &= 0 \\ c' &= a\gamma_0 + c\delta_0 \pm \varrho \frac{n}{\sigma} & d' &= \pm \sigma. \end{aligned}$$

Weil nur die Verhältnisse der vier Zahlen $a'b'c'd'$ in Betracht kommen, genügt es, die oberen Zeichen beizubehalten.

Die Zahl σ ist eindeutig bestimmt, dagegen ist die Zahl c' nur modulo $\frac{n}{\sigma} = \pm a'$ bestimmt.

Weil die Zahlen $a\,b\,c\,d$ nach Voraussetzung keinen gemeinschaftlichen Divisor besitzen, so gilt dasselbe für die Zahlen $a'b'c'd'$, folglich muß c' relativ prim gegen den größten gemeinschaftlichen Divisor der beiden Zahlen σ und $\frac{n}{\sigma}$ sein.

Wenn die Zahlen $a''b''c''d''$ ebenfalls der Bedingung (1) genügen und bzw. zu den Zahlen $a\,b\,c\,d$ kongruent sind (modulo n), so entsprechen den beiden Quadrupeln dieselben Zahlen σ und c'.

Substituieren wir die Werte (10) in (5), so folgt

$$(11)\qquad t' = \frac{\nu + \sigma\tau}{\frac{n}{\sigma}}$$

mit dem Zusatz: σ bedeutet den größten gemeinschaftlichen Divisor der Zahlen b und d; die Zahl ν ist die kleinste nicht negative Wurzel der Kongruenz

$$\nu \equiv a\gamma_0 + c\delta_0 \mod \frac{n}{\sigma}. \qquad (10)$$

Sie ist relativ prim gegen den größten gemeinschaftlichen Divisor der Zahlen σ und $\frac{n}{\sigma}$.

Die Zahlen γ_0 und δ_0 genügen der Gleichung (8)

$$d\delta_0 + b\gamma_0 = \sigma$$

und dürfen im übrigen beliebig gewählt werden.

Wegen (4) ist

$$w = I(t) = I(t').$$

Die Anzahl der verschiedenen Funktionswerte, die den unendlich vielen Zahlenquadrupeln mit der Determinante n entsprechen ist daher gleich der Anzahl der Zahlenpaare σ, ν, die den vorstehenden Bedingungen genügen.

Wir bezeichnen diese Anzahl mit $\psi(n)$ und setzen zur Abkürzung

$$I\left(\frac{\nu + \sigma\tau}{\frac{n}{\sigma}}\right) = w_{\sigma\nu}.$$

Es ist ohne weiteres klar, daß die Zahlen $\sigma\nu$ und folglich auch der Wert der Funktion w nur von den Resten der Zahlen $a\,b\,c\,d$ modulo n abhängen.

Wir wollen zwei spezielle Folgerungen aus den vorangehenden Ausführungen hervorheben.

Damit $I(t) = w_{n0}$ ist, ist erforderlich und hinreichend, daß die beiden Zahlen b und d durch n teilbar sind. Dementsprechend müssen, damit $I(t) = w_{10}$ ist, die beiden Zahlen a und c durch n teilbar sein.

Um die zahlentheoretische Funktion $\psi(n)$ zu bestimmen, zerlegen wir wieder die Zahl n in ein Produkt von Primzahlpotenzen

(12) $$n = p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \cdots p_i^{\pi_i}$$

und nehmen an, es sei

(13) $$\frac{n}{\sigma} = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \cdots p_i^{\lambda_i} \quad (0 \leqq \lambda_\varkappa \leqq \pi_\varkappa;\ \varkappa = 1, 2, \cdots i)$$

Weil die Zahl ν nur modulo $\frac{n}{\sigma}$ bestimmt ist, kommen auch nur ihre Reste in Beziehung auf die i Moduln $p_\varkappa^{\lambda_\varkappa}$ in Betracht.

Wenn $0 < \lambda_\varkappa < \pi_\varkappa$ ist, so sind die beiden Zahlen σ und $\frac{n}{\sigma}$ durch $p_\varkappa$ teilbar, folglich muß die Zahl ν relativ prim zu $p_\varkappa$ sein. Für den Rest dieser Zahl modulo $p_\varkappa^{\lambda_\varkappa}$ ergeben sich somit $p_\varkappa^{\lambda_\varkappa} - p_\varkappa^{\lambda_\varkappa - 1}$ verschiedene mögliche Annahmen.

Ist dagegen $\lambda_\varkappa = \pi_\varkappa$, so ist σ nicht durch $p_\varkappa$ teilbar und der Rest der Zahl ν modulo $p_\varkappa^{\pi_\varkappa}$ unterliegt keiner beschränkenden

Bedingung. Wir erhalten also in diesem Fall $p_\varkappa^{\pi_\varkappa}$ verschiedene Möglichkeiten.

Ist endlich $\lambda_\varkappa = 0$, so gibt es nur eine Zahlklasse mod $p_\varkappa^{\lambda_\varkappa}$. Wir erhalten also, soweit die Primzahl $p_\varkappa$ in Betracht kommt, im ganzen

$$\sum_{\lambda_\varkappa=1}^{\pi_\varkappa-1}(p_\varkappa^{\lambda_\varkappa} - p_\varkappa^{\lambda_\varkappa-1}) + p_\varkappa^{\pi_\varkappa} + 1 = p_\varkappa^{\pi_\varkappa}\left(1 + \frac{1}{p_\varkappa}\right)$$

verschiedene mögliche Annahmen bezüglich der Zahlen $\frac{n}{\sigma}$ und ν. Für die Anzahl der verschiedenen Zahlenpaare σ, ν erhalten wir folglich den Ausdruck (vgl. S. 411 unten)

$$\psi(n) = n\left(1 + \frac{1}{p_1}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{p_i}\right). \tag{14}$$

Wir untersuchen nun, wie sich die Funktion

$$w = I\left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}\right)$$

der Variabeln τ den Modulsubstitutionen gegenüber verhält. In einem zum Punkt τ homologen Punkt

$$\tau' = \frac{\gamma' + \delta'\tau}{\alpha' + \beta'\tau} \qquad (\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1) \tag{15}$$

nimmt die Funktion w den Wert

$$w^* = I\left(\frac{c + d\tau'}{a + b\tau'}\right) = I\left(\frac{c'' + d''\tau}{a'' + b''\tau}\right) \tag{16}$$

an und zwar ist

$$\begin{aligned} a'' &= a\alpha' + b\gamma' \qquad & b'' &= a\beta' + b\delta' \\ c'' &= c\alpha' + d\gamma' \qquad & d'' &= c\beta' + d\delta'. \end{aligned} \tag{17}$$

Die vier Zahlen $a''\ b''\ c''\ d''$ haben ebenso wie die Zahlen $a\ b\ c\ d$ keinen gemeinschaftlichen Divisor und ihre Determinante besitzt ebenfalls den Wert n. Daher ist der Wert w^* (16), den die Funktion w im Punkt τ' annimmt, jedenfalls gleich einem der Werte $w_{\sigma\nu}$. Bei Anwendung der Substitutionen der Modulgruppe werden also die $\psi(n)$ Werte $w_{\sigma\nu}$ untereinander permutiert.

Nehmen wir insbesondere an, die Substitution (15) gehöre der Hauptkongruenzgruppe n-ter Stufe Γ_r an, es sei also

$$\alpha \equiv \delta \equiv \pm 1 \qquad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \qquad \bmod n.$$

Unter dieser Voraussetzung ist

$$a'' \equiv \pm a \qquad b'' \equiv \pm b \qquad c'' \equiv \pm c \qquad d'' \equiv \pm d \qquad \bmod n$$

und es ist deswegen

$$w^* = I\left(\frac{c'' + d''\tau}{a'' + b''\tau}\right) = I\left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}\right) = w.$$

Jeder der $\psi(n)$ Funktionswerte $w_{\sigma\nu}$ wird also durch die Substitutionen der Hauptkongruenzgruppe n-ter Stufe Γ_r in sich selbst transformiert.

Wir bezeichnen im Einklang mit der im § 116 gebrauchten Bezeichnung mit

$$V_0 = 1 \quad V_1 \quad V_2 \cdots \tag{18}$$

die Substitutionen der Gruppe Γ_r, mit

$$U_0 = 1 \quad U_1 \quad U_2 \cdots U_{r-1} \tag{19}$$

ein Repräsentantensystem der Modulgruppe in Beziehung auf die Gruppe Γ_r.

Die Koeffizienten der Substitutionen (19) sind nur modulo n bestimmt.

Unter den Substitutionen (19) gibt es eine Anzahl, die die Funktion

$$w_{n0} = I(n\tau)$$

in sich selbst transformieren. Es seien dies die Substitutionen

$$U_0 \quad U_1 \quad U_2 \cdots U_{\varrho-1}. \tag{20}$$

Die Zahl ϱ ist ein Divisor der Zahl r.

Aus der Reihe der Substitutionen (19) können wir $\frac{r}{\varrho}$ Substitutionen

$$W_0 = 1 \quad W_1 \quad W_2 \cdots W_{\frac{r}{\varrho}-1} \tag{21}$$

derart auswählen, daß sich die sämtlichen Substitutionen (19) in der Form

$$U_\varkappa = U_\lambda W_\mu$$

$$(\varkappa = 0, 1, 2, \cdots r-1;\ \lambda = 0, 1, 2, \cdots \varrho - 1;\ \mu = 0, 1, 2, \cdots \frac{r}{\varrho} - 1)$$

darstellen lassen.

Keine zwei von den Substitutionen (21) können die Funktion w_{n0} in dieselbe Funktion $w_{\sigma\nu}$ transformieren. Wir werden nun beweisen, daß $\frac{r}{\varrho} = \psi(n)$ ist. Daraus folgt dann:

Die Modulgruppe enthält Substitutionen, die eine gegebene Funktion aus der Reihe der $\psi(n)$ Funktionen $w_{\sigma\nu}$ in eine beliebige andere Funktion aus derselben Reihe transformieren.

Die Funktion $w_{n0} = I(n\tau)$ wird durch die Modulsubstitution (15) in

$$w^* = I\left(\frac{n\gamma' + n\delta'\tau}{\alpha' + \beta'\tau}\right)$$

transformiert. Damit $w^* = w_{n0}$ ist, müssen, wie oben (S. 416) bemerkt worden ist, die Zahlen $b' = \beta'$ und $d' = n\delta'$ durch n teilbar sein. Die Koeffizienten der Substitutionen (20) genügen also der Kongruenz

$$\beta' \equiv 0 \mod n \tag{22}$$

und sie genügen als Koeffizienten von Modulsubstitutionen außerdem der Kongruenz

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' \equiv 1 \mod n.$$

Der Koeffizient α' kann beliebig aus der Reihe der zur Zahl n relativ primen Zahlen gewählt werden; ist dies geschehen, so ist der Koeffizient δ' mod n bestimmt. Der Koeffizient γ' kann beliebig gewählt werden.

Die Anzahl der inkongruenten zum Modul n relativ primen Zahlen ist bekanntlich

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_i}\right). \tag{12}$$

Weil den beiden Zahlenquadrupeln $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ und $-\alpha', -\beta', -\gamma', -\delta'$ dieselbe Modulsubstitution entspricht, ist daher

$$\varrho = \tfrac{1}{2} n\, \varphi(n) \quad \text{für} \quad n > 2$$

und

$$\varrho = n\, \varphi(n) = 2 \quad \text{für} \quad n = 2\,.$$

Im ersten Fall ist (vgl. Nr. 9 des vorigen Paragraphen)

$$r = \frac{1}{2} n^3 \left(1 - \frac{1}{p_1^{\,2}}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2^{\,2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_i^{\,2}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} n\, \varphi(n)\, \psi(n) \tag{14}$$

im zweiten

$$r = n \varphi(n)\, \psi(n) = 6\,.$$

Es ist daher auf jeden Fall

$$\frac{r}{\varrho} = \psi(n) \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Unter den Substitutionen (20), die die Funktion w_{n0} in sich transformieren, gibt es eine Anzahl, die außerdem die Funktion $w_{10} = I\left(\frac{\tau}{n}\right)$ in sich transformieren. Die Modulsubstitution (15) transformiert w_{10} in

$$w^* = I\left(\frac{\gamma' + \delta'\tau}{\alpha' n + \beta' n\tau}\right).$$

Wie S. 416 bemerkt worden ist, müssen, damit $w^* = w_{10}$ ist, die beiden Zahlen γ' und $\alpha' n$ durch n teilbar sein. Es ist also $\gamma' \equiv 0 \mod n$. Die Modulsubstitutionen, die die beiden Funktionswerte w_{n0} und w_{10} in sich transformieren, genügen demnach den Kongruenzen (22)

$$\beta' \equiv 0 \quad \gamma' \equiv 0 \quad \alpha'\delta' \equiv 1 \mod n\,. \tag{23}$$

Eine dieser Substitutionen transformiert die Funktion

$$w_{11} = I\left(\frac{1+\tau}{n}\right)$$

in die Funktion

$$w_{\sigma\nu} = I\left(\frac{(\alpha' + \gamma') + (\beta' + \delta')\tau}{n\alpha' + n\beta'\tau}\right). \tag{17}$$

Wegen (23) ist die Zahl $d'' = \beta' + \delta'$ relativ prim zur Zahl n und, weil der größte gemeinschaftiche Divisor der Zahlen d'' und $b'' = n\beta'$ auch Divisor der Determinante n ist, so sind auch die Zahlen b'' und d'' relativ prim, es ist also $\sigma = 1$ zu setzen (siehe die Bemerkung zu (7)).

Die Zahl ν ist durch die Kongruenz

$$(24) \qquad \nu \equiv n\alpha'\gamma_0 + (\alpha' + \gamma')\delta_0 \quad \mod n$$
$$\equiv \alpha'\delta_0 \qquad (23)$$

bestimmt (vgl. den Zusatz zu (11)). Die Zahlen γ_0 und δ_0 genügen der Gleichung

$$(\beta' + \delta')\delta_0 + n\beta'\gamma_0 = 1.$$

Hieraus folgt auf Grund von (23) die Kongruenz

$$(25) \qquad \delta'\delta_0 \equiv 1 \quad \mod n.$$

Aus (24) und (25) ergibt sich die Kongruenz

$$(26) \qquad \delta'\nu \equiv \alpha' \quad \mod n$$

die den Index ν bestimmt.

Damit die in Rede stehende Substitution auch die Funktion w_{11} in sich transformiert, muß $\nu = 1$ also

$$\alpha' \equiv \delta' \quad \mod n$$

sein (26). Wenn diese Bedingung zu den Bedingungen (23) hinzutritt, so gehört die Substitution der Gruppe Γ_r an.

Die Hauptkongruenzgruppe n-ter Stufe Γ_r enthält demnach alle Substitutionen der Modulgruppe, die gleichzeitig alle $\psi(n)$ Werte $w_{\sigma\nu}$ in sich transformieren.

§ 120. Die Invariantengleichung. Weil bei Anwendung einer beliebigen Modulsubstitution die $\psi(n)$ Funktionen

$$(1) \qquad w_{\sigma\nu} = I\left(\frac{\nu + \sigma\tau}{\frac{n}{\sigma}}\right)$$

nur untereinander vertauscht werden, ist eine symmetrische Funktion dieser Größen eine einwertige Funktion der Variabeln I (S. 400). Folglich sind die Größen $w_{\sigma\nu}$ Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom Grade $m = \psi(n)$

$$(2) \qquad F(w/I) = w^m + A_1 w^{m-1} \cdots + A_m = 0,$$

deren Koeffizienten einwertige Funktionen der Variabeln I sind. Man bezeichnet diese Gleichung als Invariantengleichung (vgl. § 109, Schluß).

Als Funktion der Variabeln τ betrachtet wird die Invariante I nur im unendlich fernen Punkt der τ-Ebene und in den homologen Punkten unendlich (§ 115). Die Funktion $I(\tau)$ wird also nur unendlich, wenn das Argument τ eine reelle rationale Zahl ist. Die Funktionen $w_{\sigma\nu}$ (1) werden daher ebenfalls nur für reelle rationale Werte der Variabeln τ unendlich. Eine jede dieser Größen kann daher, als Funktion der Variabeln I betrachtet, nur im unendlich fernen Punkt der I-Ebene unendlich werden. Daraus folgt, daß die Koeffizienten der Gleichung (2) ganze (rationale oder transzendente) Funktionen der Variabeln I sind.

Um das Verhalten dieser Koeffizienten in der Umgebung des unendlich fernen Punktes der I-Ebene zu untersuchen, benutzen wir die Reihenentwicklungen, die die Größen I und $w_{\sigma\nu}$ als Funktionen der Variabeln τ darstellen.

Aus den Gleichungen

$$I = \frac{4}{27}\,\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2} = \frac{4}{27}\,\frac{(k^4+k'^2)^3}{k^4k'^4} \qquad (\S\ 115,\ \text{Nr. } 7)$$

und

$$\lambda = k^2 = \left[\frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)}\right]^4 = 2^4 q\left[\frac{1+q^2+q^6+q^{12}\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9\cdots}\right]^4$$

$$1-\lambda = k'^2 = \left[\frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)}\right]^4 = \left[\frac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}\right]^4$$

$$q = e^{\pi i \tau}$$

(§ 66, Nr. 13 und § 61, Nr. 6, 7 und 8)

ergibt sich für die Funktion $I(\tau)$ die Reihenentwicklung

$$(3) \qquad I(\tau) = \frac{1}{12^3 q^2}\left[1 + 744q^2 + 196\,844q^4 + \cdots\right].$$

Diese Reihenentwicklung kann nur gerade Potenzen von q enthalten, weil dies für die Reihenentwicklungen der Größen k'^2 und k^4 gilt; die Koeffizienten sind rationale Zahlen.

Mittelst der Funktion $I(\tau)$ wird die I-Ebene auf das Kreisbogenviereck Π in der positiven τ-Halbebene abgebildet

(vgl. Fig. 36, S. 397), das zwischen den Ordinaten durch die Punkte 0 und 1 liegt. Rückt der variable Punkt in der I-Ebene ins Unendliche, so wächst demnach die Ordinate des Bildpunktes τ durch positive Werte ins Unendliche und es ist $\lim q = 0$.

Hieraus folgt weiter (3)

$$\lim_{\tau=\infty} q^2 I = \frac{1}{12^3}$$

und

$$\lim_{\tau=\infty} e^{\pi i \frac{2\sigma\nu + 2\sigma^2\tau}{n}} w_{\sigma\nu} = \frac{1}{12^3}. \qquad (1)$$

Der Vergleich dieser beiden Grenzbedingungen zeigt, daß der Quotient

$$\frac{w_{\sigma\nu}}{I^{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

endlich bleibt, wenn der Punkt I ins Unendliche rückt.

Daraus folgt, daß die Koeffizienten der Gleichung (2) nur wie eine angebbare Potenz der Variabeln I unendlich werden, wenn die Variable unendlich wird.

Wir haben bereits nachgewiesen, daß diese Koeffizienten ganze Funktionen der Variabeln I sind; wir können nunmehr feststellen, daß sie rationale Funktionen sind.

Die Gruppe G der Gleichung (2) läßt sich isomorph auf die Gruppe Γ der Modulsubstitutionen beziehen, derart, daß der identischen Substitution der Gruppe G in der Modulgruppe Γ die Hauptkongruenzgruppe n-ter Stufe Γ_r entspricht (vgl. § 116). Wir haben früher bewiesen, daß die Gruppe G einfach ist, wenn die Zahl n eine Primzahl > 3 ist (§ 108); ist die Zahl n zusammengesetzt, so ist, wie man sich leicht überzeugt, auch die Gruppe G zusammengesetzt.

Die Modulgruppe enthält, wie im vorigen Paragraphen gezeigt worden ist, Substitutionen, die eine gegebene Größe aus der Reihe $w_{\sigma\nu}$ in eine beliebige andere transformieren. Folglich enthält die isomorphe Gruppe G eine Substitution, die eine gegebene Wurzel der Gleichung (2) durch eine beliebige andere ersetzt; sie ist also transitiv (§ 90). Hieraus

folgt (§ 95): Die Invariantengleichung ist irreduzibel, wenn als Rationalitätsbereich der Inbegriff der rationalen Funktionen der Variabeln I festgesetzt wird.

Weil die Größen $w_{n0} = I(n\tau)$ und $w_{10} = I\left(\frac{\tau}{n}\right)$ der Gleichung (2) genügen, verschwinden die beiden analytischen Ausdrücke

$$F(I(n\tau)/I(\tau)) \tag{4}$$

und

$$F\left(I\left(\frac{\tau}{n}\right) \Big| I(\tau)\right) \tag{5}$$

identisch. Dasselbe gilt für den Ausdruck

$$F(I(\tau)/I(n\tau)), \tag{6}$$

der aus (5) hervorgeht, wenn wir τ durch $n\tau$ ersetzen.

Der Vergleich der Ausdrücke (4) und (6) zeigt, daß die Gleichung (2) in Geltung bleibt, wenn wir die Größen w und I vertauschen. Weil diese Gleichung irreduzibel ist, können sich daher die beiden Polynome $F(w/I)$ und $F(I/w)$ nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Es ist also

$$F(w/I) = cF(I/w)$$

und folglich

$$F(I/w) = cF(w/I)$$

also $c = \pm 1$.

Wäre $c = -1$, so müßte $F(I/I) = 0$ sein; es wäre also das Polynom $F(w/I)$ durch die Differenz $w - I$ teilbar. Dies ist unmöglich, weil die Gleichung (2) irreduzibel ist. Es ist daher

$$F(w/I) = F(I/w). \tag{7}$$

Das Polynom $F(w/I)$ ist in bezug auf die Variable w vom Grade $m = \psi(n)$ und der Koeffizient von w^m hat den Koeffizienten 1. Folglich ist das Polynom auch in Beziehung auf die Variable I vom Grade m und der Koeffizient von I^m ist $= 1$. Daraus folgt: die Koeffizienten $A_1 A_2 \cdots A_{m-1}$ der Gleichung (2) sind höchstens vom Grade $m - 1$

in der Variabeln I, der Koeffizient A_m ist vom Grade m.

Um die ganzen Funktionen $A_1 A_2 \cdots A_m$ der Variabeln I zu berechnen, kann man sie erst mit unbestimmten Koeffizienten ansetzen und dann in die Gleichung (2) für I die Reihe (3), für w die Reihe

$$w_{n0} = \frac{1}{12^3 q^{2n}} \left[1 + 744 q^{2n} + 196\,884 q^{4n} + \cdots\right]$$

substituieren. Indem man die Koeffizienten der einzelnen Potenzen der Größe q gleich Null setzt, erhält man lineare Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten der Funktionen $A_1 A_2 \cdots A_m$.

Diese Koeffizienten ergeben sich als rationale Zahlen, weil die Koeffizienten der Reihenentwicklungen rationale Zahlen sind.

Dieses Verfahren gestaltet sich aber praktisch sehr umständlich, weil die zu bestimmenden Koeffizienten sehr große Zahlen sind; es ist deshalb nur für den Fall $n = 2$ durchgeführt worden.

Man gelangt durch die folgende Überlegung zu Gleichungen, die eine große Analogie mit der Invariantengleichung zeigen: es sei $u = f(\tau)$ eine Modulfunktion, die der algebraischen Gleichung

$$\Phi(u/I) = 0 \tag{8}$$

genügt. Wir setzen wie oben

$$w = I\left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}\right) \qquad (ad - bc = n)$$

und ferner

$$v = f\left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}\right).$$

Zwischen den Größen w und v besteht die Gleichung

$$\Phi(v/w) = 0. \tag{9}$$

Eliminiert man aus den Gleichungen (2), (8) und (9) die Größen I und w, so ergibt sich eine Gleichung

$$\Psi(v/u) = 0 \tag{10}$$

zwischen den Größen

$$u = f(\tau) \quad \text{und} \quad v = f\left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}\right).$$

Man bezeichnet eine derartige Gleichung als „Modulargleichung". Die am Schluß des § 109 erwähnten Gleichungen zwischen den Größen

$$k^2(\tau) \quad \text{und} \quad \varkappa^2(\tau) = k^2\left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}\right)$$

und zwischen den Größen $\sqrt[4]{k}$ und $\sqrt[4]{\varkappa}$ gehören zu diesen Modulargleichungen. Wir können auf die Theorie dieser Gleichungen hier nicht weiter eingehen.

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

I. Die ganze Funktion vierten Grades.

$$f(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$$
$$= a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4).$$

Irrationale Invarianten.

$$A = a_0(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)$$
$$B = a_0(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)$$
$$C = a_0(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_3)$$
$$A + B + C = 0$$
$$\mathsf{A} = B - C \quad \mathsf{B} = C - A \quad \Gamma = A - B.$$

Rationale Invarianten.

$$g_2 = -\frac{1}{36}(\mathsf{AB} + \mathsf{B}\Gamma + \Gamma\mathsf{A}) = -\frac{1}{12}(AB + BC + CA)$$
$$= a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$$
$$g_3 = \frac{1}{432}\mathsf{AB}\Gamma = \frac{1}{432}(B - C)(C - A)(A - B)$$
$$= a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 - a_2^3.$$

Diskriminante.

$$G = \frac{1}{4^4} A^2 B^2 C^2 = \frac{1}{4 \cdot 36^3}(\mathsf{B} - \Gamma)^2(\Gamma - \mathsf{A})^2(\mathsf{A} - \mathsf{B})^2$$
$$= g_2^3 - 27g_3^2.$$

Absolute Invariante.

$$I = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} = \frac{4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{27\lambda^2(\lambda - 1)^2} \quad \lambda = -\frac{A}{B}$$

$$I : I - 1 : 1 = g_2^3 : 27g_3^2 : G$$
$$= 4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 : [(\lambda + 1)(2\lambda - 1)(\lambda - 2)]^2 : 27\lambda^2(\lambda - 1)^2.$$

II. Die kanonischen Formen des Integrals erster Gattung und die elliptischen Funktionen.

Weierstraßsche kanonische Form.

$$u = \int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_x^\infty \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

Perioden $2\omega_1, 2\omega_3$; $\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$.

Die Größen $e_1 e_2 e_3$ stimmen von der Reihenfolge abgesehen mit den Größen

$$\frac{1}{12}\mathsf{A} \quad \frac{1}{12}\mathsf{B} \quad \frac{1}{12}\Gamma$$

überein. Folglich ist

$$(e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2 (e_1 - e_2)^2 = \frac{1}{16} G = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27 g_3^2).$$

Im Fall reeller Größen wird

$$e_1 > e_2 > e_3$$

vorausgesetzt.

$$x = p(u) \qquad 2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)} = -p'(u)$$

$$p(u + 2\omega_\nu) = p(u) \quad p(\omega_\nu) = e_\nu \qquad \nu = 1, 2, 3.$$

Riemannsche und Legendresche kanonische Form.

$$v = \int_0^y \frac{dy}{2\sqrt{y(1-y)(1-k^2 y)}} \qquad \text{Riemannsche kanonische Form}$$

$$v = \begin{cases} \displaystyle\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} \\ \displaystyle\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \end{cases} \qquad \text{Legendresche kanonische Form}$$

Perioden $2K$, $2iK'$

$$\varphi = \operatorname{am} v \quad \sin\varphi = z = \sqrt{y} = \operatorname{sn} v$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - z^2} = \sqrt{1 - y} = \operatorname{cn} v$$

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - k^2 z^2} = \sqrt{1 - k^2 y} = \operatorname{dn} v$$

$$\frac{d\,\operatorname{sn} v}{dv} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v$$

$$\frac{d\,\operatorname{cn} v}{dv} = -\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v$$

$$\frac{d\,\operatorname{dn} v}{dv} = -k^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v.$$

Beziehungen zwischen den kanonischen Formen.

$$v = \sqrt{e_1 - e_3}\,u \quad K = \sqrt{e_1 - e_3}\,\omega_1 \quad iK' = \sqrt{e_1 - e_3}\,\omega_3$$

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} \qquad k' = \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}}$$

$$z = \operatorname{sn} v = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{x - e_3}} = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{p(u) - e_3}}$$

$$\sqrt{1 - z^2} = \operatorname{cn} v = \sqrt{\frac{x - e_1}{x - e_3}} = \sqrt{\frac{p(u) - e_1}{p(u) - e_3}}$$

$$\sqrt{1 - k^2 z^2} = \operatorname{dn} v = \sqrt{\frac{x - e_2}{x - e_3}} = \sqrt{\frac{p(u) - e_2}{p(u) - e_3}}.$$

III. Die Weierstraßschen Funktionen.

Die Funktionen $\sigma(u)$ und $\zeta(u)$

$$\zeta(u) = -\int p(u)\,du$$

$$\lim_{u=0} \left[\zeta(u) - \frac{1}{u}\right] = 0$$

$$\zeta(u + 2\omega_\nu) = \zeta(u) + 2\eta_\nu \qquad \nu = 1, 2, 3 \qquad \eta_2 = \eta_1 + \eta_3$$

$$\eta_\nu = \zeta(\omega_\nu)$$

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \frac{\pi i}{2} \quad \text{(Legendresche Relation)}$$

$$\log \sigma(u) = \int \zeta(u)\,du$$

$$\lim_{u=0} \frac{\sigma(u)}{u} = 1$$

$$\sigma(u + 2\omega_\nu) = -e^{2\eta_\nu (u + \omega_\nu)}\,\sigma(u)$$

$$\zeta(u) = \frac{d \log \sigma(u)}{du} \qquad p(u) = -\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2}.$$

Die Funktionen $\sigma_\nu(u)$.

$$\sigma_\nu(u) = e^{-\eta_\nu u}\frac{\sigma(\omega_\nu + u)}{\sigma(\omega_\nu)} = e^{\eta_\nu u}\frac{\sigma(\omega_\nu - u)}{\sigma(\omega_\nu)}$$

$$\sigma_\nu(u + 2\omega_\nu) = -e^{2\eta_\nu(u+\omega_\nu)}\sigma_\nu(u)$$

$$\sigma_\nu(u + 2\omega_\lambda) = e^{2\eta_\lambda(u+\omega_\lambda)}\sigma_\nu(u) \qquad \lambda \neq \nu$$

$$\frac{\sigma_\nu(u)}{\sigma(u)} = \sqrt{p(u) - e_\nu}.$$

Darstellung durch unendliche Reihen und Produkte.

$$w_{\lambda\mu} = 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3$$

$$\sigma(u) = u\Pi'\left(1 - \frac{u}{w_{\lambda\mu}}\right)e^{\frac{u}{w_{\lambda\mu}} + \frac{u^2}{2w_{\lambda\mu}^2}}$$

$\lambda, \mu = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$ in inf. ausgenommen $\lambda = 0\ \mu = 0$

$$\sigma(u) = u - \frac{g_2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5}\cdot u^5 - \frac{g_3}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}u^7 - \frac{g_2^2}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}u^9 \cdots$$

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum{}'\left[\frac{1}{u - w_{\lambda\mu}} + \frac{u}{w_{\lambda\mu}^2} + \frac{1}{w_{\lambda\mu}}\right]$$

$$= \frac{1}{u} - \frac{g_2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5}u^3 - \frac{g_3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7}u^5 - \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7}u^7 \cdots$$

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum{}'\left[\frac{1}{(u - w_{\lambda\mu})^2} - \frac{1}{w_{\lambda\mu}^2}\right]$$

$$= \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{2^2 \cdot 5}u^2 + \frac{g_3}{2^2 \cdot 7}\cdot u^4 + \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2}u^6 + \cdots$$

$$g_2 = 60\sum{}'\frac{1}{w_{\lambda\mu}^4} \qquad g_3 = 140\sum{}'\frac{1}{w_{\lambda\mu}^6}.$$

IV. Die ϑ-Funktionen.

Darstellung durch unendliche Reihen.

$$q = e^{\frac{\pi i \omega_3}{\omega_1}} = e^{-\frac{\pi K'}{K}} \quad q^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\pi i \omega_3}{4\omega_1}}$$

$$H(u) = H(u/\omega_1, \omega_3) = H(v/K, iK')$$

$$= 2q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi u}{2\omega_1} - 2q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{3\pi u}{2\omega_1} + 2q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{5\pi u}{2\omega_1} - \cdots$$

$$H_1(u) = H_1(u/\omega_1, \omega_3) = H_1(v/K, iK')$$

$$= 2q^{\frac{1}{4}} \cos \frac{\pi u}{2\omega_1} + 2q^{\frac{9}{4}} \cos \frac{3\pi u}{2\omega_1} + 2q^{\frac{25}{4}} \cos \frac{5\pi u}{2\omega_1} + \cdots$$

$$\Theta(u) = \Theta(u/\omega_1, \omega_3) = \Theta(v/K, iK')$$

$$= 1 - 2q \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + 2q^4 \cos \frac{2\pi u}{\omega_1} - 2q^9 \cos \frac{3\pi u}{\omega_1} + \cdots$$

$$\Theta_1(u) = \Theta_1(u/\omega_1, \omega_3) = \Theta_1(v/K, iK')$$

$$= 1 + 2q \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + 2q^4 \cos \frac{2\pi u}{\omega_1} + 2q^9 \cos \frac{3\pi u}{\omega_1} + \cdots.$$

Darstellung durch unendliche Produkte.

$$Q = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6) \cdots$$

$$Q_1 = (1 + q^2)(1 + q^4)(1 + q^6) \cdots$$

$$Q_2 = (1 + q)(1 + q^3)(1 + q^5) \cdots$$

$$Q_3 = (1 - q)(1 - q^3)(1 - q^5) \cdots$$

$$Q_1 Q_2 Q_3 = 1$$

$$H(u) = Q \cdot 2q^{\frac{1}{4}} \sin \frac{\pi u}{2\omega_1} \left(1 - 2q^2 \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + q^4\right) \cdot \left(1 - 2q^4 \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + q^8\right) \cdots$$

$$H_1(u) = Q \cdot 2q^{\frac{1}{4}} \cos \frac{\pi u}{2\omega_1} \left(1 + 2q^2 \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + q^4\right) \cdot \left(1 + 2q^4 \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + q^8\right) \cdots$$

$$\Theta(u) = Q\left(1 - 2q \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + q^2\right)\left(1 - 2q^3 \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + q^6\right) \cdots$$

$$\Theta_1(u) = Q\left(1 + 2q \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + q^2\right)\left(1 + 2q^3 \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + q^6\right) \cdots.$$

Die Nullwerte.

$$H'(0) = \lim_{u=0} \frac{H(u/\omega_1, \omega_3)}{u} = \sqrt{e_1 - e_3} \lim_{v=0} \frac{H(v/K, iK')}{v}$$

$$= \frac{\pi}{\omega_1} q^{\frac{1}{4}} Q^3 = \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}} \sqrt[8]{G}$$

$$H_1(0) = 2q^{\frac{1}{4}} Q Q_1^2 = \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[4]{e_2 - e_3}$$

$$\Theta(0) = Q Q_3^2 = \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_2}$$

$$\Theta_1(0) = Q Q_2^2 = \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_3}.$$

Nullpunkte.

$$\begin{array}{r|c} H(u) & 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3 \\ H_1(u) & (2\lambda + 1)\omega_1 + 2\mu\omega_3 \\ \Theta(u) & 2\lambda\omega_1 + (2\mu + 1)\omega_3 \\ \Theta_1(u) & (2\lambda + 1)\omega_1 + (2\mu + 1)\omega_3. \end{array}$$

Periodizitätseigenschaften.

$$M = e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u + \omega_3)} = \frac{1}{q} e^{-\frac{\pi i u}{\omega_1}}$$

$$\begin{array}{ll} H(u + 2\omega_1) = -H(u) & H(u + 2\omega_3) = -MH(u) \\ H_1(u + 2\omega_1) = -H_1(u) & H_1(u + 2\omega_3) = MH_1(u) \\ \Theta(u + 2\omega_1) = \Theta(u) & \Theta(u + 2\omega_3) = -M\Theta(u) \\ \Theta_1(u + 2\omega_1) = \Theta_1(u) & \Theta_1(u + 2\omega_3) = M\Theta_1(u). \end{array}$$

Beziehungen zwischen den vier ϑ-Funktionen.

$$N = e^{-\frac{\pi i}{4\omega_1}(2u + \omega_3)} = q^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i u}{2\omega_1}}$$

$$\begin{array}{ll} H(u + \omega_1) = H_1(u) & H_1(u + \omega_1) = -H(u) \\ H(u + \omega_3) = iN\Theta(u) & \Theta(u + \omega_3) = iNH(u) \\ H(u + \omega_2) = N\Theta_1(u) & \Theta_1(u + \omega_2) = iNH(u) \\ \Theta(u + \omega_1) = \Theta_1(u) & \Theta_1(u + \omega_1) = \Theta(u) \\ \Theta(u + \omega_2) = NH_1(u) & H_1(u + \omega_2) = -iN\Theta(u) \\ H_1(u + \omega_3) = N\Theta_1(u) & \Theta_1(u + \omega_3) = NH_1(u). \end{array}$$

Beziehungen zwischen den σ-Funktionen und den ϑ-Funktionen.

$$\sigma(u) = e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \frac{H(u)}{H'(0)}$$

$$\sigma_1(u) = e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \frac{H_1(u)}{H_1(0)}$$

$$\sigma_2(u) = e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \frac{\Theta_1(u)}{\Theta_1(0)}$$

$$\sigma_3(u) = e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}$$

$$\eta_1 = \frac{\pi^2}{2\omega_1}\left[\frac{1}{6} - \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{4q^{2\mu}}{(1-q^{2\mu})^2}\right].$$

V. Die Jacobischen Funktionen sn v cn v dn v.

$$\sqrt{k} = \frac{H_1(0/K, iK')}{\Theta_1(0/K, iK')} \qquad \sqrt{k'} = \frac{\Theta(0/K, iK')}{\Theta_1(0/K, iK')}$$

$$\operatorname{sn} v = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(v/K, iK')}{\Theta(v/K, iK')}$$

$$\operatorname{cn} v = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(v/K, iK')}{\Theta(v/K, iK')}$$

$$\operatorname{dn} v = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(v/K, iK')}{\Theta(v/K, iK')}.$$

Periodizitätseigenschaften.

$$\operatorname{sn}(v+2K) = -\operatorname{sn} v \qquad \operatorname{sn}(v+2iK') = \operatorname{sn} v$$

$$\operatorname{cn}(v+2K) = -\operatorname{cn} v \qquad \operatorname{cn}(v+2iK') = -\operatorname{cn} v$$

$$\operatorname{dn}(v+2K) = \operatorname{dn} v \qquad \operatorname{dn}(v+2iK') = -\operatorname{dn} v.$$

Beziehungen zwischen den drei Funktionen.

$$\operatorname{sn}(v+K) = \frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v} \qquad \operatorname{sn}(v+iK') = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\operatorname{sn} v}$$

$$\operatorname{cn}(v+K) = -k'\frac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v} \qquad \operatorname{cn}(v+iK') = -\frac{i}{k}\frac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} v}$$

$$\operatorname{dn}(v+K) = \frac{k'}{\operatorname{dn} v} \qquad \operatorname{dn}(v+iK') = -i\frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{sn} v}$$

$$\operatorname{sn}(v+K+iK') = \frac{1}{k}\frac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{cn} v}$$

$$\operatorname{cn}(v+K+iK') = -i\frac{k'}{k}\frac{1}{\operatorname{cn} v}$$

$$\operatorname{dn}(v+K+iK') = ik'\frac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{cn} v}.$$

Vertauschung der Größen K und K'.

$$\operatorname{sn}(iv/K, iK') = i\,\frac{\operatorname{sn}(v/K', iK)}{\operatorname{cn}(v/K', iK)}$$

$$\operatorname{cn}(iv/K, iK') = \frac{1}{\operatorname{cn}(v/K', iK)}$$

$$\operatorname{dn}(iv/K, iK') = \frac{\operatorname{dn}(v/K', iK)}{\operatorname{cn}(v/K', iK)}.$$

VI. Additionstheoreme.

Die Weierstraßschen Funktionen.

$$p(u \pm w) = \tfrac{1}{4}\left[\frac{p'(u) \mp p'(w)}{p(u) - p(w)}\right]^2 - p(u) - p(w)$$

$$p(u + \omega_\nu) - e_\nu = \frac{(e_\nu - e_\lambda)(e_\nu - e_\mu)}{p(u) - e_\nu}$$

λ, μ, ν eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3.

$$p(u) - p(w) = \frac{\sigma(w+u)\,\sigma(w-u)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(w)}$$

$$\frac{p'(w)}{p(u) - p(w)} = \zeta(u - w) - \zeta(u + w) + 2\zeta(w).$$

Die Jacobischen Funktionen.

$$\operatorname{sn}(v + w) = \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w + \operatorname{sn} w \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2 w}$$

$$\operatorname{cn}(v + w) = \frac{\operatorname{cn} v \operatorname{cn} w - \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v \operatorname{sn} w \operatorname{dn} w}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2 w}$$

$$\operatorname{dn}(v + w) = \frac{\operatorname{dn} v \operatorname{dn} w - \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2 w}.$$

Register.

VERLAG VON B. G. [...] D BERLIN.

Encyklopädie der Elementar-Mathematik.

Ein Handbuch für Lehrer und Studierende von

Dr. Heinrich Weber und **Dr. Joseph Wellstein,**
Professoren an der Universität Straßburg i. Els.

In drei Bänden.

I. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von **H. Weber.** 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. *M.* 9.60.

II. Elemente de[...] **thal.** Mit 280 T[...] [2. Auflage u[...]

III. Angewandt[...] und **R. H. Webe[...]** In Leinwand g[...]

Das We[...] schaftlichen St[...] später zu lehr[...] dieser Lehren [...] Arbeit ist nich[...] zu ersehen od[...] Gewand, sonde[...] der Elemente. [...] Lehrer und St[...] tungen auch e[...] sammenstellung[...]

„... Zwei [...] Das eine liegt dar[...] erfahren, in einem[...] Das zweite Momen[...] haben, eine pragm[...] tionen und Rechn[...] gewähltem Materi[...] überall auf die Gr[...] cyklopädie der Ele[...] Grenzen dessen, w[...] und das ist noch [...] geometrischen Wis[...] und mit Nutzen z[...] Fragen kommen, u[...] Eines verd[...] mit schönen, sehr [...] Formen sphärische[...] und Study'schen D[...]

„... Daß [...] matik von höherer[...] Lehrer, jeder Stud[...] systematischer Hi[...] elementaren mathe[...]

„... Die E[...] aber zur Vorbereit[...] Mathematik dringe[...] studiert haben, sic[...] schaft die Begriffs[...] stalten sind."

